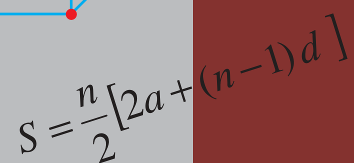
د پوهنې وزارت

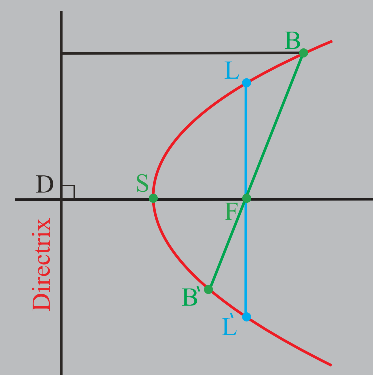


ریاضي ۱۱

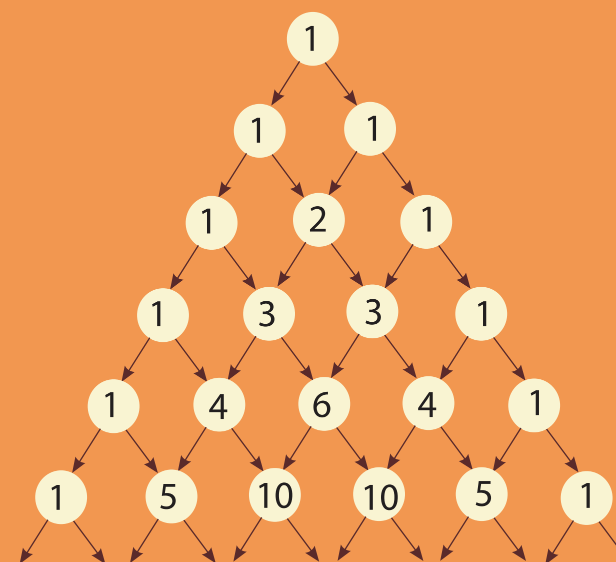
ټولګی

$p(x, y, z)$





ریاضي ۱۱ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۸



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم



د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.



د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: يوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af



د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي





لړلیک

سرلیک | مخونه

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

دویم څپرکی مثلثات



دریم څپرکی فضايي هندسه

څلورم څپرکی ترادفونه

پنځم څپرکی لوګاريتم



شپږم څپرکی متریکسونه

اووم څپرکی وکتورونه

اتم څپرکی احصایه

نهم څپرکی احتمالات

لوەڕی خێرکی

مخروطي مقاطع

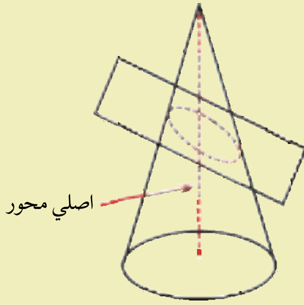






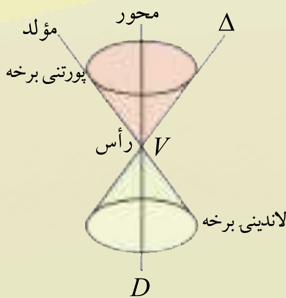
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګاني لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعریف



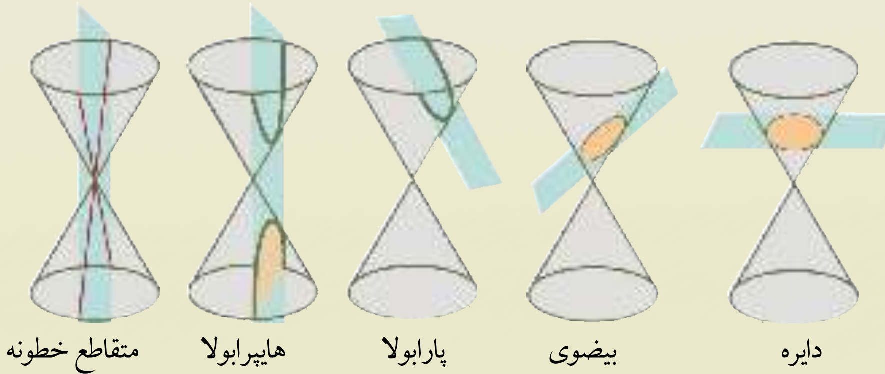
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکي کې قطع کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیر وڅرخیږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکی) پورته او بل یې د V د ټکي ښکته خواته جوړیږي. هر یو یې مخروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی.

د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفي منحني ګاني منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کیږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

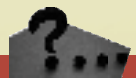
- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایله وي، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یاګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.



پوښتنې

1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

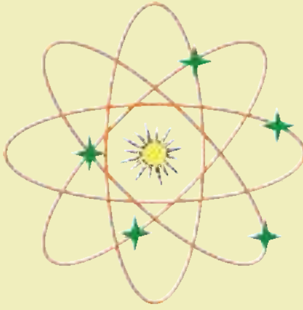
3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیې؟

بیضــوي

Ellipse

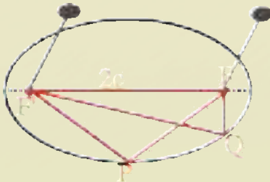
د سیارو حرکت د لمریز نظام په شاوخوا څه ډول منحني

ګاني جوړوي؟



فعالیت

- د میز پر سر د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکه چې اوږدوالی یې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زیات یا د $\overline{FF'}=2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل ته په کتو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وخرخوئ.
- هغه شکل چې له یوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

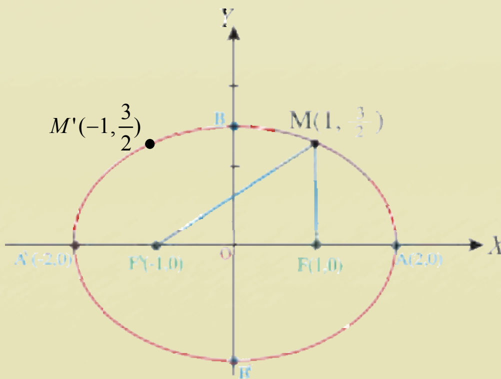


له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له خرخولو څخه په لاس راځي، بیضوي بلل کیږي، د F او F′ ټکي د بیضوي د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|, |MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالې پیدا کړې او د $|MF|+|MF'|$ جمع حاصل لاس ته راوړې او د $|AA'|$ اوږدوالی سره یې پرتله کړئ.





- د $M'(-1, \frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنی ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

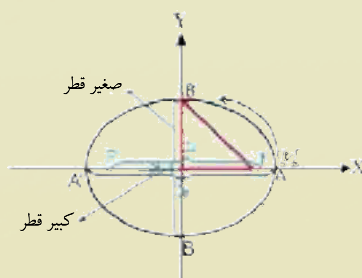
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F′ تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A, A' د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \; |M F| + |M F'| = 2a$$

نو:

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF′ د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکی د بیضوی راسونه دي، کبیر قطر په $A A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یاددښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کیږي.

د بیضوی له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$



د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

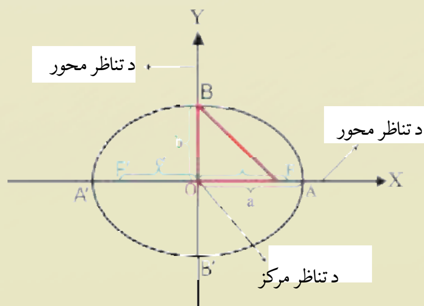
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کیږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادیږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

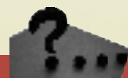
عن المرکزیت (**Eccentricity**): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایي چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کیږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

يادونه: که چیرې د e قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي د ډېرو مسایلو په حل کې د عن المرکزیت څخه کار اخیستل کېږي.



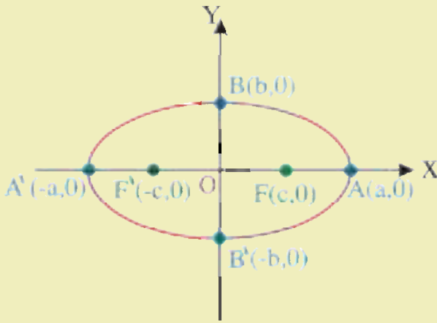
پوښتنې

1 – که چیرې په بیضوي کې د کبیر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چیرې د بیضوي عن المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیداکړئ او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

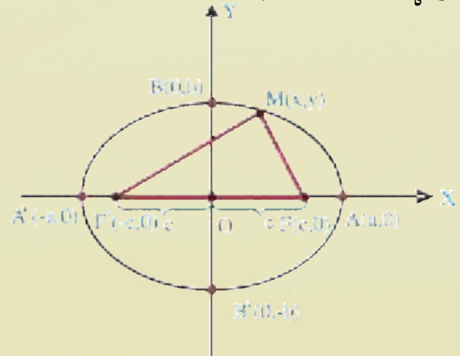
لومړی حالت: موږ لرو:

$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$



د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توگه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بیضوي په پورته معادله کې a د کبیر قطر نیمایي او b د صغیر قطر نیمایي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د x پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a، 0)\\A'(-a,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}B(0،b)\\B'(0، -b)\end{cases}\qquad\begin{cases}F(c، 0)\\F'(-c، 0)\end{cases}$$

دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

د هغه گراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات یې ولیکي.

لومړی مثال: که چېرې د بیضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی یې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6\Rightarrow a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \Rightarrow b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



دویم مثال: که چیرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی یې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

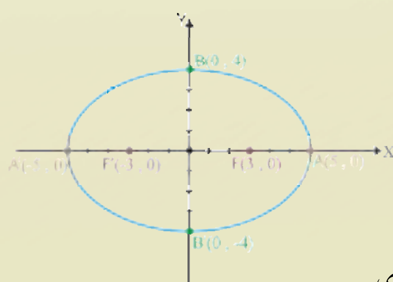
$$|A\,A'|=2a=10 \quad\Rightarrow\quad a=\pm 5$$
$$|B\,B'|=2b=8 \quad\Rightarrow\quad b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3 ، 0)$ څخه عبارت دي.

عین المرکزیت: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$ دی.

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad\Rightarrow\quad a=\pm 4 \quad\Rightarrow\quad A(0 ، 4) \;،\; A'(0 \;،\; -4)$$
$$b^2=4 \quad\Rightarrow\quad b=\pm 2 \quad\Rightarrow\quad B(2 ، 0) \;،\; B'(-2 ، 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0, \sqrt{12}),\ F'(0, -\sqrt{12})$$

څلورم مثال:د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a \quad \ldots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2}\ )^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$



پوښتني

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

$a)\ \ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad\qquad b)\ \ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

آیا دداسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکز یې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

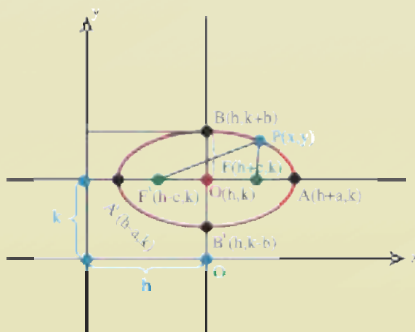
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) اوږد قطر یې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې ایږدو.



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})\ /\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\ \ /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لــومړی مثــال: د یـوې بیـضوي د مرکـز، محراقونـو او اوږد قطـر د راسـونو مختـصات چـې معادلـه یـې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې نومـوړې معادلـه عمـومي شـکل لـري، لـه دې املـه د مرکـز مختـصات یـې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

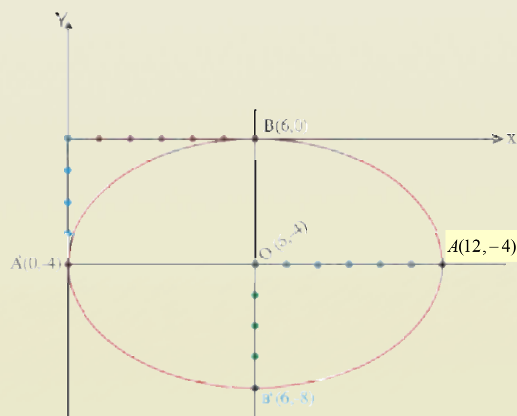
$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$

د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

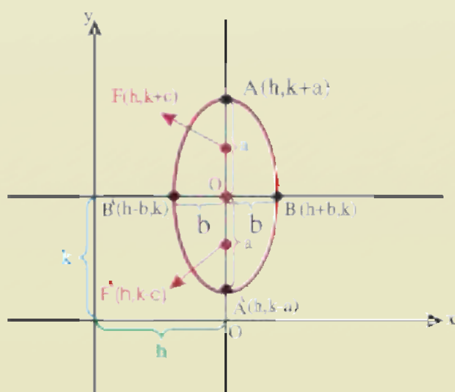
د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5}\ ,-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\ ,k+a)\ ,\ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\ ,k)\ ,\ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ ,\ F(h\ ,k+c)$$



يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعنې $A>0\ ,\ C>0$ يا $A<0\ ,\ C<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 ویشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2, -1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

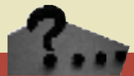
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 ویشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$



پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

$a)\quad \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

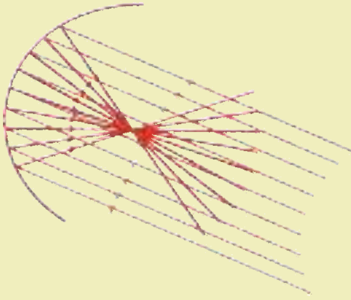
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(1,2)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکي څخه تېره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

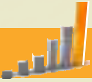
$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

پارابـولا

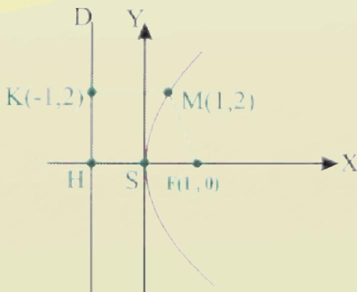
Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسيې ولـوېږي، انعکاسـي وړانګې يې له کوم ټکي څخه تېرېـږي؟ دغـه ټکـی څه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصلـي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟



فعاليت

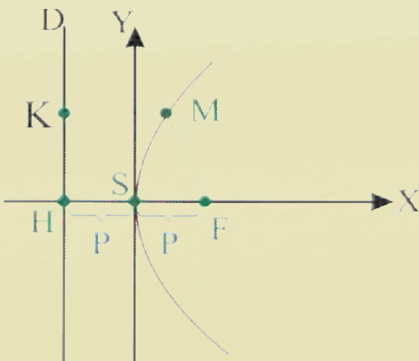


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيدا کولـو لـه فـارمول څخـه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالـی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکـي او يـوه ثابـت مـستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF}=\overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مـستقيم خـط عمـود وي، د پـارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.



د تناظري محور او منحني ګـډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

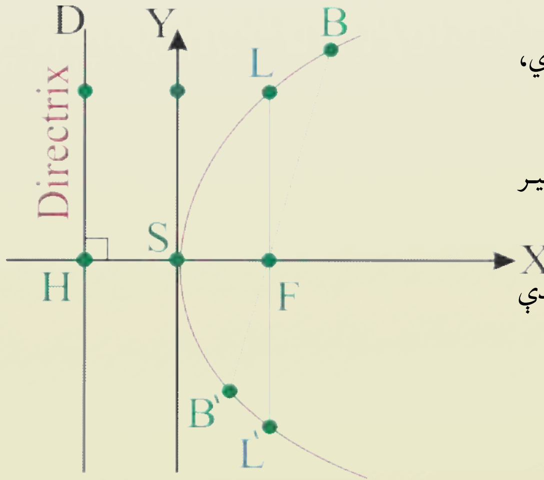
په پارابولا کې عن المرکزيت $(e=1)$ دی، ولې؟

د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.





پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښیئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

د پارابولا معادله

څنګه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کړو.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

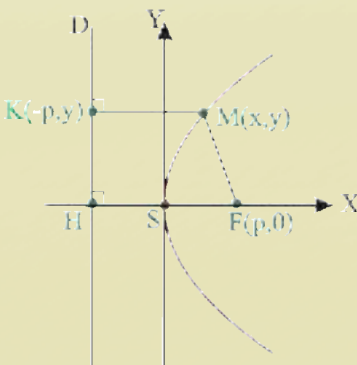
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د M,F او M,K ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او دا قیمتونه د پارابولا د تعریف په رابطه کې کېږدئ. $|MF| = |MK|$

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قمیتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



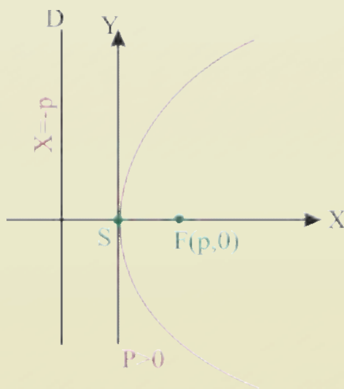
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

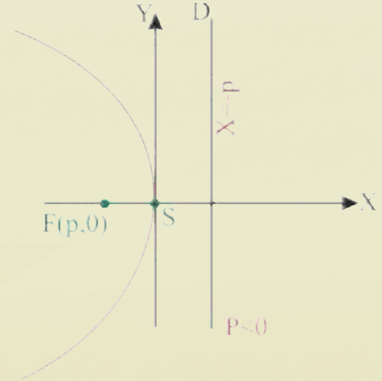
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2}\,)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.



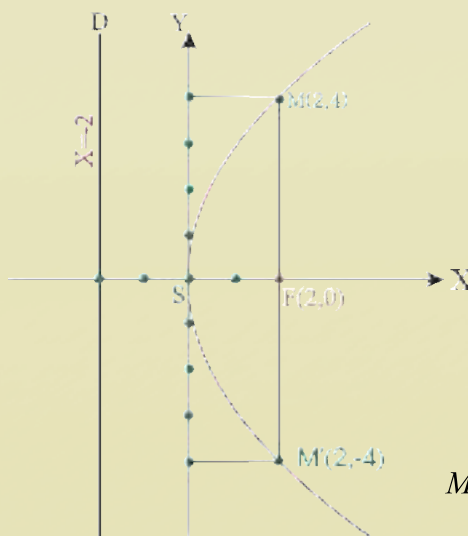


لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلاي شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:



$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

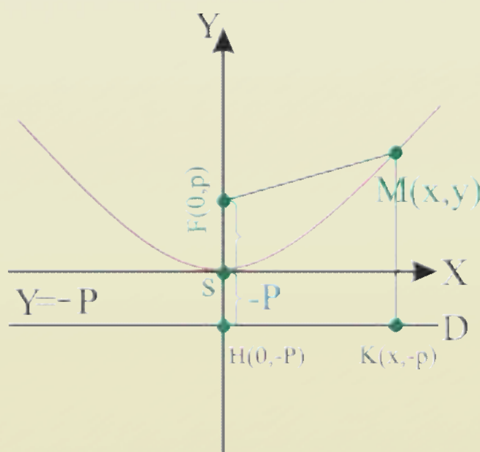
$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)$, $M'(2,-4)$

دویم حالت: که چیرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$|\overline{MF}|=|MK|$$

$$|\overline{MF}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}|=\sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2=(\sqrt{(y+p)})^2 \,/(\ )^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

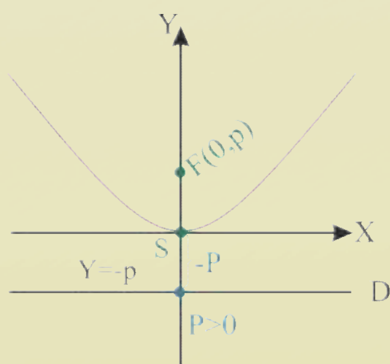
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

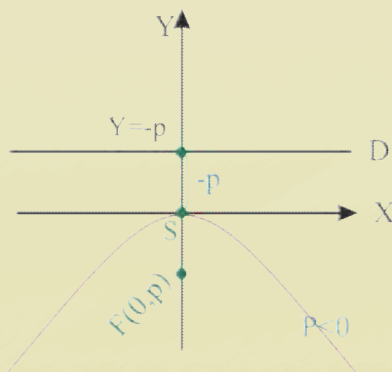
$$\Rightarrow x^2=4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پيدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

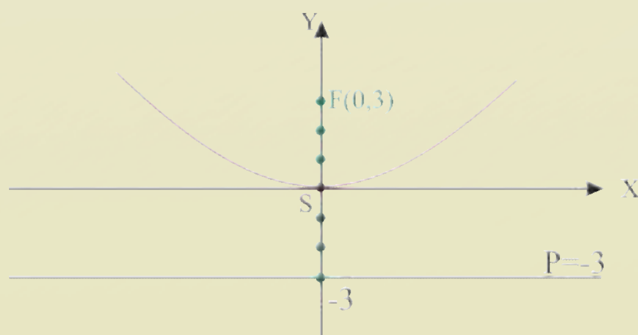
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

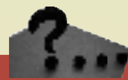
ځرنګه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{matrix} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$





پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)$ $S(0,0)$ $F(0,5)$

$b)$ $S(0,0)$ $F(-2,0)$

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

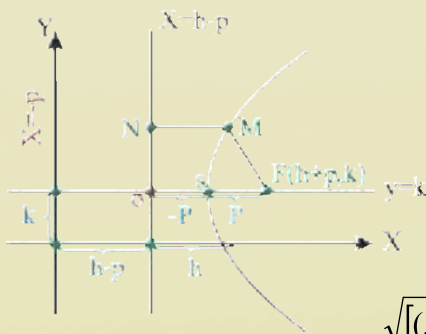
آيا د داسې پارابولا معادله پيداکولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيداکړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دي، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

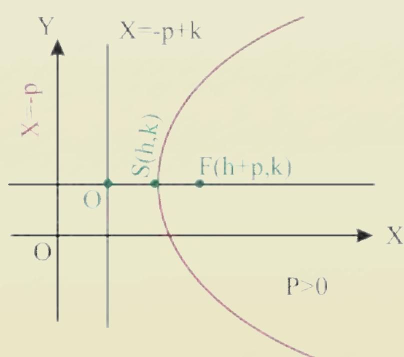
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

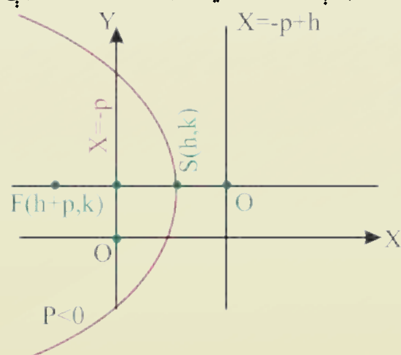
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





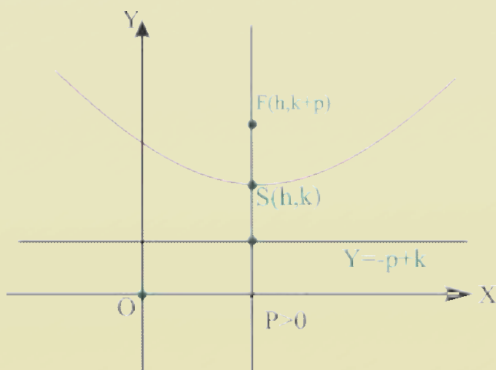
دویم حالت: د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

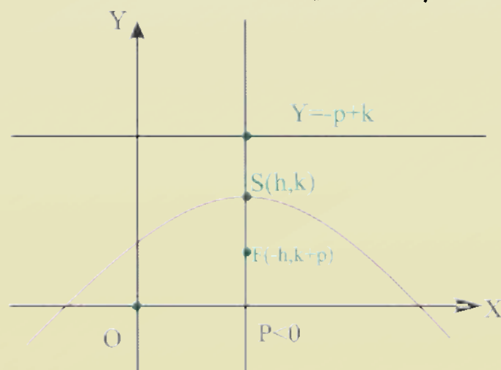
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2, h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

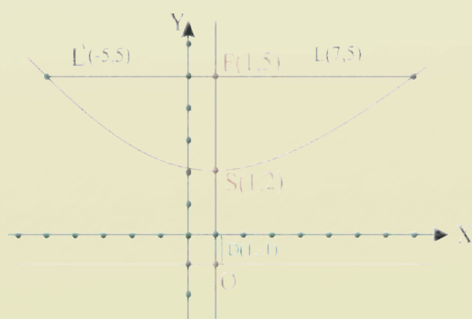
د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \quad \Rightarrow \quad F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \quad \Rightarrow \quad y=2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې ايږدو يعنې $y=5$ دی.

$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7, \; x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \qquad L'(-5,5)$$



دويم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $k=4, h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

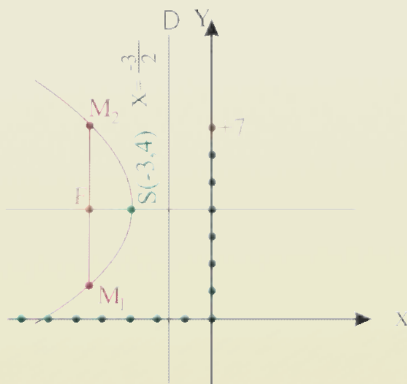
څرنگه چې $0 > -\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \quad \Rightarrow \quad y=4$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قيمت په معادله کې ايږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه ($A=0\ ,\ C\neq 0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

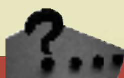
په معادله کې لیدل کېږي: $4P=-8 \quad \Rightarrow \quad P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \quad \Rightarrow \quad y=1$.



پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې ګراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

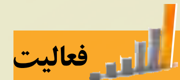
$a)\ \ y^2-6y+8x+41=0 \qquad\qquad b)\ \ x^2-2x-6y-53=0$

هـايپـربـولا

Hyperbola

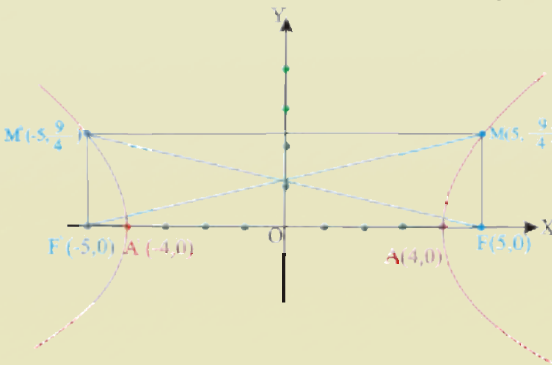


په یوه مستوي کې د ټولـو هغـو ټکـو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکـو څخه تـل لـه یوه ثابـت اوږدوالـي سـره مـساوي وي، څـه ډول یـوه منحنـي کېدلای شي؟



فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ.
- د $|MF|-|MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله يې ولیکئ
- د $|MF|-|MF'|$ او $|M'F|-|M'F'|$ د تفریق حاصل يو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تـل مـساوي اوږدوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کېږي، یعنې: $|MF'|-|MF|=|AA'|=2a$

په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه، M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هایپربولا مرکز دی، د مرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله پـه a او د مرکـز او هـر یـوه محـراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA'=2a$ او $FF'=2c$.

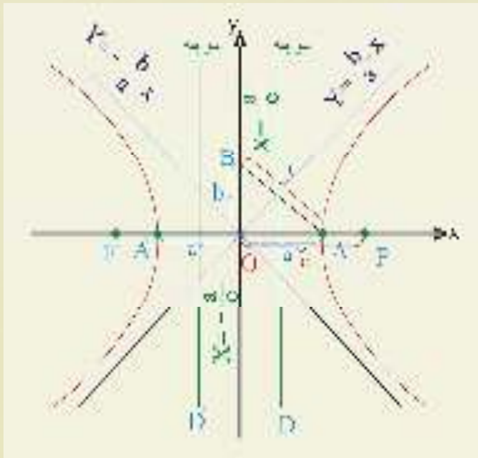
د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې په FF' بانـدې منطبق دی او بل یې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د ها یپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis)په نامه یادیږي، څکـه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربولا حقیقي راسونه وایې او اوږدوالی یې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور(conjugate axis) په نوم یـادیږی. د مرکـز دواړو خواوتـه د B او B' دوه ټکـي پـر نومـوړی محـور بانـدې داسې په نظر کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هـایپربولا غیـرې حقیقـي راسـونه بلـل کیـږي چـې ترمنځ یې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په یوه هایپربولا کې د b, a او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$



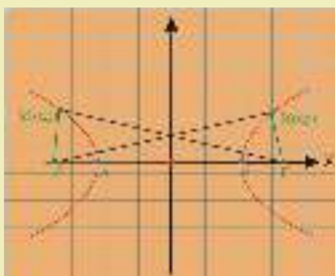
عن المرکزیت: څرنگـه چـې پـه هـایپربولا کـې $c > a$ دي، نـو $e > 1$ کیـږي. چـې د c, b, a او عـن المرکزیـت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ لـه رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.



پوښتنې

د هایپربولا یو شـکل رسـم کـړئ او پـه هغـه کـې د هـایپربولا مرکـز، محراقونـه، حقیقـي او غیـرې حقیقـي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښیئ.

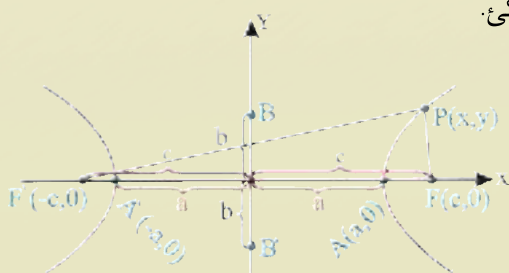
د هایپربولا معادله



آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟

فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هایپربولا د منحني په یوې څانګې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F,P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپربولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.



د هایپربولا د معادلې د پیداکولو لپاره د تعریف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې په هایپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ / \div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنۍ معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

د پورتنۍ رابطې ګراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .



د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتنی رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږي په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

حل: دراَسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\quad\Rightarrow\quad b=\pm2\quad\Rightarrow\quad B(0،\ 2)\ ،\ B'(0،\ -2)$$

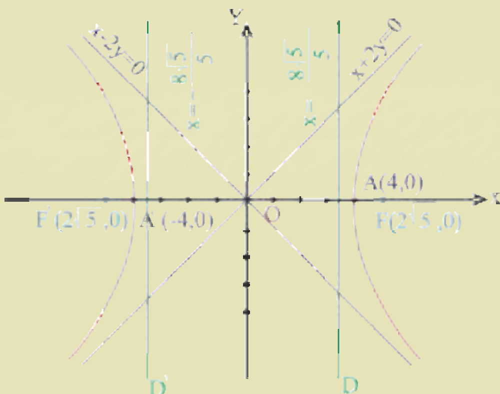
د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنگه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



دویم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4\Rightarrow a=\pm2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm3\Rightarrow B(3\ ,0)\ ,\ B'(-3\ ,0)$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې یې عبارت دي له:

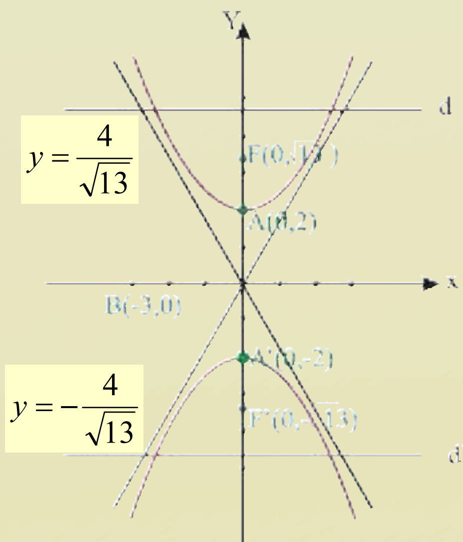
$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\qquad,\qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$





پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او ګراف یې رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

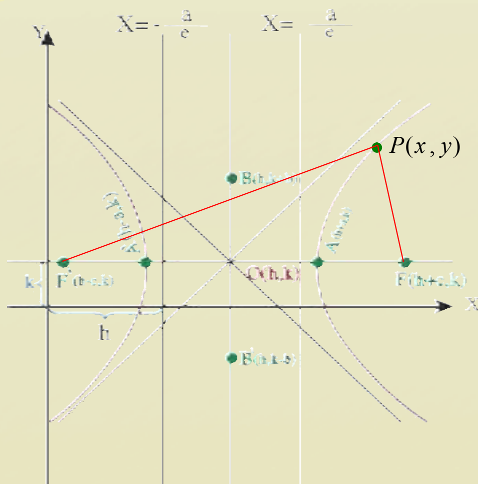
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې د x له محور سره موازي وي.



- د هایپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ یو اختیاري ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو مختصات یعنې F او F'، د راسونو مختصات یعنې A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.

د شکل څخه په کار اخیستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول او د هایپربولا د تعریف له رابطې څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

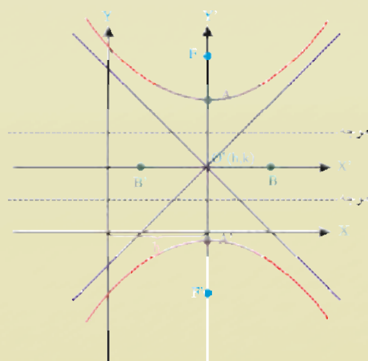
د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$



دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

یادونه: د هایپربولا پراختیایي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړی مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k = -1, h = 3$ یعنې $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

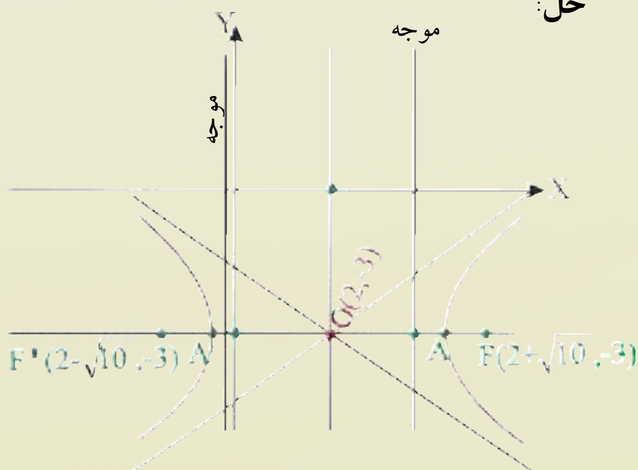
د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \quad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1$$
$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1 \;\; /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3) - 2$$
$$2y = 3x - 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y - 3x + 11 = 0$$
$$2y = -3x + 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y + 3x - 7 = 0$$

دویم مثال: د هایپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعني د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \qquad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: خرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

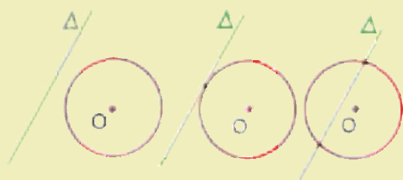
پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایره د امکان په صورت

کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

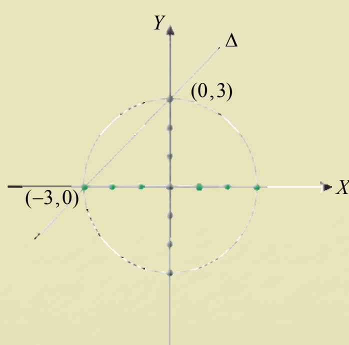
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مستقیم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعیه کمیاتو کې د $x^2+y^2=9$ دایره او $y=x+3$ مستقیم خط رسم او موقعیت یې و ټاکئ.

حل: په شکل کې لیدل کیږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y=x+3$$
$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قیمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \Rightarrow y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکی دی.

په عمومي ډول کله چې د مستقیم خط له معادلې څخه د x یا y متحول قیمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

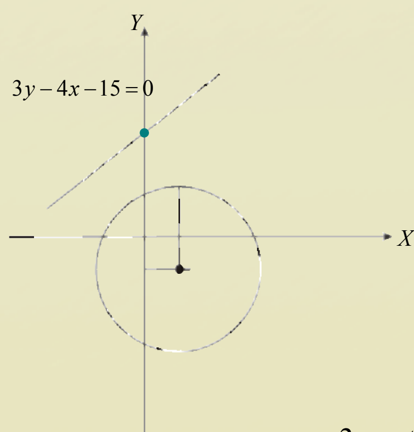
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقیم خط او منحني یوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقیم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقیم خط او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقیم خط په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دایرې معادله په معیاری شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاري معادلې څخه پوهېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیم خط معادله معیاري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \ \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow\ 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وڅیړئ.

حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې و ضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \ \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \ \Rightarrow x^2-x=0$$

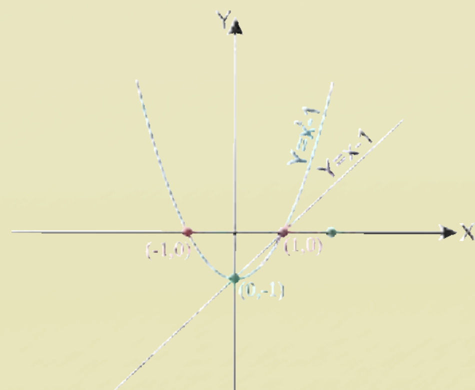
$$\Delta=b^2-4ac \ \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \ \Rightarrow \Delta=1$$

څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

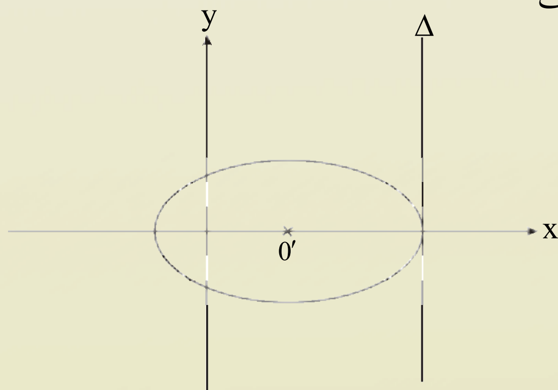
$$x_1=1 \qquad , \qquad x_2=0$$



که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

ځلورم مثال: د $x=5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

حــل: کـه چېـرې د $x=5$ د مـستقیم خـط قیمـت د بیضوي په معادله کې کېښېږدو، نو په لاس راځي:



$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

څرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$

په دې ډول ویلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنۍ معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A=B$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ یا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ay^2+By+Cx+D=0 \text{ او } Ax^2+Bx+Cy+D=0$$



پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$

$b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$

$d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ بیضوي او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونوکې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم يادېږي.

بيضوي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه يې د فاصلو د جمعې حاصل يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کيږي، مستقر ټکي چې په F' او F توررو ښودل شوي، د بيضوي محراقونه بلل کيږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

شمېره	معادلې	د مرکز وضعيه کميات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm c,k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm c)$

د بيضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وایي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمیره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ یا $A\neq 0, C=0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزیت $e=1$ سره دی.

هايپربولا: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تـل ثابت اوږدوالی ولري، هايپربولا بلل کېږي.

د هايپربولا معادلې	د مرکز وضعيه کميات	د رأسونو وضعيه کميات	غير حقيقي رأسونه	محراقونه	د موجه خطونو معادلې	د مجانبونو معادلې
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$x=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$y=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h\pm a,k)$	$B(h,k\pm b)$	$F(h\pm c,k)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h,k\pm a)$	$B(h\pm b,k)$	$F(h,k\pm c)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

د هايپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ يا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي. په هايپربولا کې عن المرکزيت $e>1$ دی.



د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې یو مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د بیضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بیضوي له مرکز څخه:

a) برابر واټن لري b) مختلف واټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمایي واټن لري d) د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چیرې M د بیضوي یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د بیضوي عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- په بیضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. د محراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چېرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کېدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$



9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته   b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته   c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$ b) $e=1$ c) $e>1$ d) $e=-1$

11- د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.   b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.   d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره   b) دایره   c) پارابولا   d) بیضوي

13- د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$ b) $(4,2)$ c) $(2,0)$ d) $(-2,0)$

14- د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې   b) بیضوي   c) پارابولا   d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$ $b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$ $d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=4$ ، $e=0{,}8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=6$ $e=0{,}8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$ b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معیاري شکل ولیکئ او بیاېې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

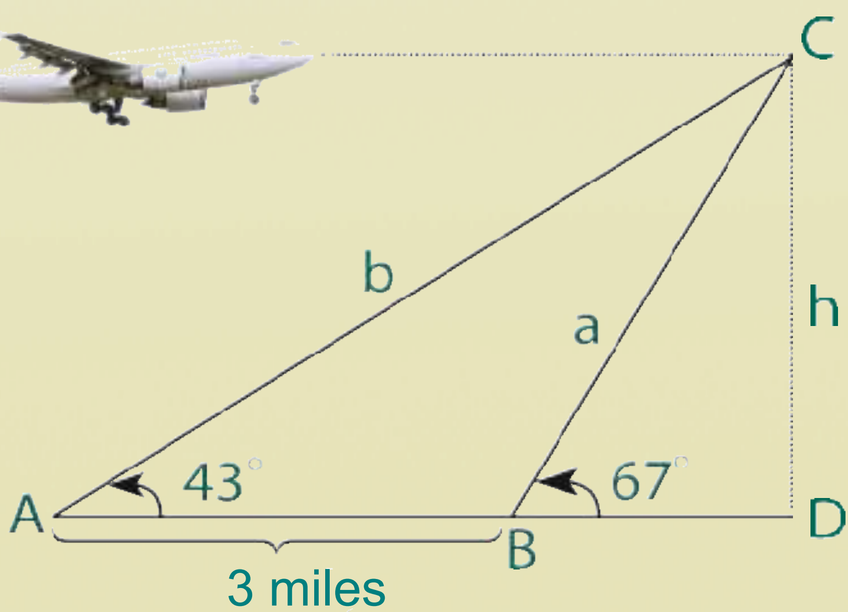
7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی یې 4 واحده وي.

8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دويم څپرکی

مثلثات

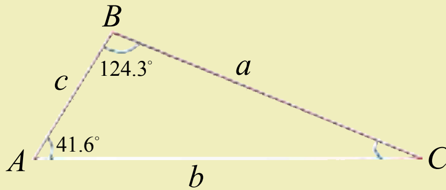



C
b
a
h
43°
67°
A
B
D
3 miles

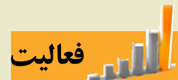


د ساین قانون

Law of sine

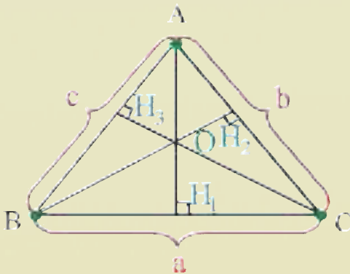


خرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعاليت

- د ABC يو حادهالزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی يې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH}_1$, $\overline{BH}_3$, $\overline{CH}_2$) ارتفاع ګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH}_1$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 پـه قـايمالزاويـه مثلثـونـو کـې د ($\overline{BH}_2$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړي.



له پورتني فعاليت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH}_1 = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH}_1 = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

او يا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c\sin A \;......... \;(3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a\sin C \;......... \;(4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې:

$$c\sin A = a\sin C \,/ \div ac$$

او یا:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... \;II$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

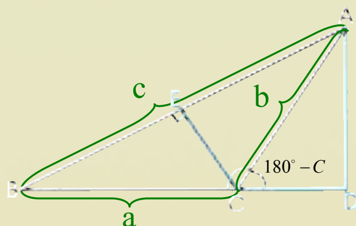
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې C, B, A یې زاویې او c, b, a یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو : $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(1)$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځایونه بدلوو. $\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$

نو : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;........ \;I$

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږي:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

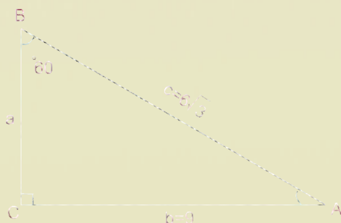


فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال: په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\not 9}{\not 9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیدا کولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیدا کړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

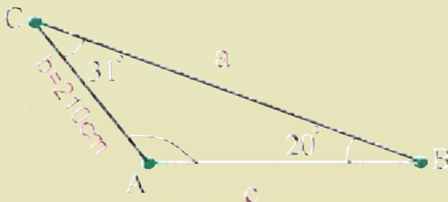
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422km\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224km$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیدا کړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیدا کولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

د a ضلعې د اوږدوالي د پيداکولو لپاره د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

خرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پيدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

خرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قيمتونو په ايښودلو سره ليکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

يادونه:

د ساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاويې او د معلومې زاويې مخامخ ضلع يې معلومه وي، يعنې: ($A\ \ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاويه يې معلومه وي، يعنې:(SAS).

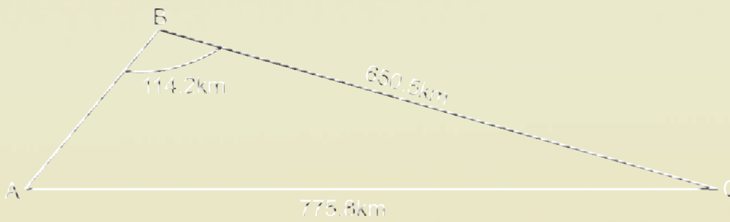
بايد ووايو چې دلتهA د Angle او s د side مخفف دي.



پوښتنې

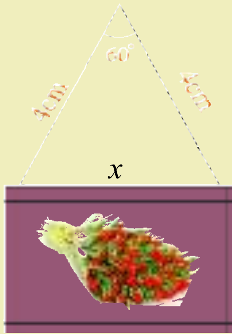
1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$, $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine



د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پـر مـخ ځـړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یـو $4\,cm$ وي او د مـنځ زاو یـه یـې 60° وي، د تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیـدا او د فیثـاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

ثبوت: د ABC په حادةالزاویـه مثلـث کـې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـمـوو

$$\overline{BH} = h \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{CH} = b - x$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$



د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې: $\cos A=\frac{x}{c} \Rightarrow x=c\cdot\cos A$

په $a^2=b^2+c^2-2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c\cdot\cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ یا $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

پایله: په یو اختیاری مثلث کې مو دا $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ یا $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}...I$ رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ یا $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}....II$

$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C$ یا $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}....III$

په هر مثلث کې د یوې زاویې کوساین (Cos) مساوی دی د زاویې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاویې د مقابلې ضلعې مربع د زاویې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعالیت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساین قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

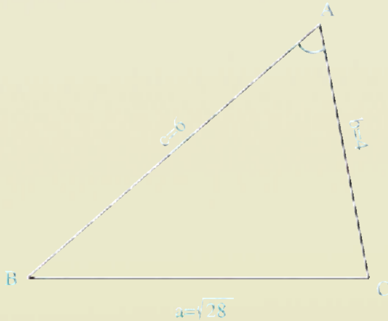
- چې دوې ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
کله چې د یوه مثلث د دریو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع)
کله چې د یوه مثلث د دوو زاویو او د یوې معلومې زاویې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
کله چې د یوه مثلث د دوو ضلعو او د یوې معلومې ضلعې د مقابلې زاویې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
کله چې د یو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاویې اندازه معلومه وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دریو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاویې اندازه وټاکئ.

حل:



$$a=\sqrt{28}\quad ,\quad b=4\quad ,\quad c=6\quad ,\quad A=?$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot 4\cdot 6\cos A$$

$$28=16+36-48\cos A\quad \Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$

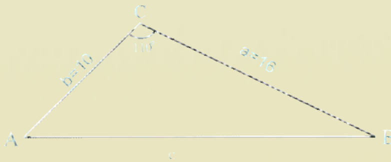
$$48\cos A=52-28\quad \Rightarrow\quad 48\cos A=24$$

$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاویه یې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos 110^\circ$$

$$c^2=256+100-320\cos 110^\circ$$

$$c^2=356-320\cos 110^\circ$$

$$c=\sqrt{356-320\cos 110^\circ}$$

ځرنګه چې : $\cos 110^\circ=-0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(-0.342)}\quad \Rightarrow\quad c=\sqrt{356+109.44}$$

$$\boxed{c=21.57}$$

دریم مثال: یو پتنګ (کاغذ پران) له $100\,m$ تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم‌الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad \Rightarrow\quad x=100\cdot\cos 60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $b=5$, $c=8$, $\hat{A}=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارولو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$





پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b=4\,ft$, $a=5\,ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلي اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A \quad , \quad \frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B$$

پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$

$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړیکې یو پر بل ویشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

څرنګه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$



فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

- پورتنۍ رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$

$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

څرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\frac{B-C}{2}=30^\circ\Rightarrow B-C=60^\circ\quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ\quad ....\ \mathrm{I}$$
$$B+C=90^\circ\quad ....\ \mathrm{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $c=432\ ,\ B=42^\circ\ \ 30'$ او $a=925$ وي، د د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ\ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-B\ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$
$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30'\Rightarrow A+C=137^\circ\ 30'\ ....\ \mathrm{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432}\quad\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$
$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45'\ \Rightarrow\ \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363\cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0,933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad ....\ \text{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نيولو سره د A زاويې قيمت پيدا کوو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \quad ...I$$

$$\underline{A-C = 86^\circ \qquad\qquad} ...II$$

$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاويې قيمت پيدا کړو:

$$A+C = 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساين قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پيدا کوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\cdot\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاويو د ساين قيمتونه ليکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.676$$

$$b = 432\cdot\frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

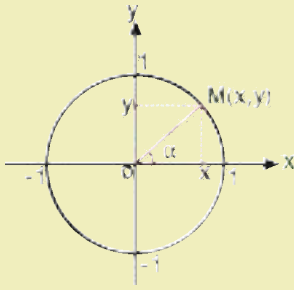
د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پيدا کړئ.

a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پـوهېږو چـې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یــو الجبــري مطابقــت دی، ځکــه د a او b پــه ټولــو قیمتونــو ســره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آیا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ یو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قیمتونو لپاره د A او B افادو قیمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قیمتونه پرتله او رابطه یې ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاس ته راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې پـه ټولـو قیمتونـو سره ، د مـساوات دواړه خـواوې برابـرې شـي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قیمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.

ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث

د سموو او کولای شو ویې لیکو:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

د فیثارغورث د قضیې څخه کولای شو ولیکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ویشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \quad \text{یا} \quad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افـاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سـر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حـدود د یـوې یـا څـو زاویـو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې سـاده کـولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$
$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کینې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه اېږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې ښئ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

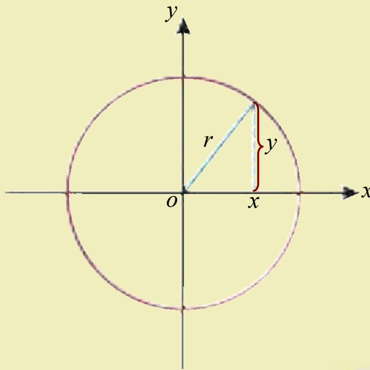
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $\qquad d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهېږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت دی، آيا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.

 _ آيا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

 _ آيا $1-2\sin\beta=0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

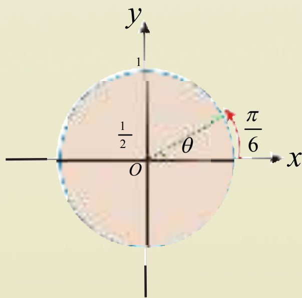
هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حل کولی شو.

لومړی حالت: $a\sin\alpha + b = 0$

د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

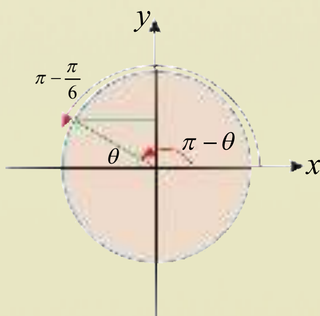
حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو

چې sin یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ , \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه

هغه زاویې پیداکوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ , \ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \Rightarrow 2\sin x=3 \Rightarrow \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$ د -1 او $+1$ په منځ($-1\le \sin x\le 1$) دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

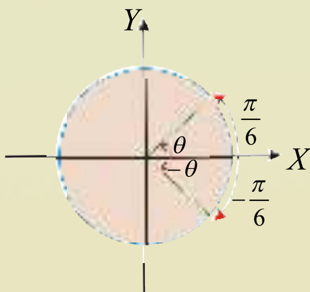
د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0, \pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیدا کوو.

$$x=\frac{\pi}{6} \quad , \quad 2\pi+\frac{\pi}{6} \quad , \quad 4\pi+\frac{\pi}{6}...$$

$$x=-\frac{\pi}{6} \quad , 2\pi-\frac{\pi}{6} \quad , \quad 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي : $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3...$

$$A=\left\{x / x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in z\right\}$$

دويم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $a\tan x+b=0$

د عمومي حل د پيداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

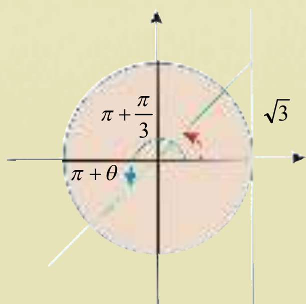
حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ ...\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ ...\right\}$$



په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\frac{7\pi}{12}\\ \xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}\end{cases}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنۍ معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0\quad\Rightarrow\ \cot x=1$

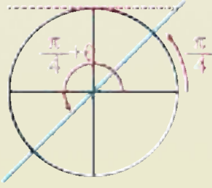
اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه ګورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه عبارت ده :

نو:

$$\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \ 2\pi + \frac{\pi}{4}, \ 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, \ 3\pi + \frac{\pi}{4}, \ 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$



نو د معادلې د حل سټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, \ 2\pi + \frac{\pi}{4}, \ 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}, \ 3\pi + \frac{\pi}{4}, \ 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, \ k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره داسې ليکو:

$$A = \{x / x = k\pi + \theta, \ k \in Z\}$$

دريم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

$a)$ $3\cos x + 5 = 0$

$b)$ $\tan x = \sqrt{3}$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & \end{array} \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0 , 1 , 2 ...$$

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنی زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{aligned} &x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ &x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{aligned} \qquad k \in Z \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چېرې په پورتنی معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$

$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنی زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ یې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{7\pi}{6},\ 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

یا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad ,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دریم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,2\pi,3\pi\ ,4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\ \pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$



پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راتولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\text{sinx} + \text{siny} = a \;\ldots\quad \text{I}\\ \text{x} + \text{y} = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \text{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، څکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots\; I\\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x + y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots\; I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنې معادلې ښي لوری له $(+1)$ څخه لوی او لـه (-1) څخه کوچنی نه دی، څکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل

ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

ځرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1 \Rightarrow \sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2} \text{.........} \; I \\ x+y=\frac{\pi}{2} \text{........} \; II \end{cases} \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2} \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې ایږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$
$$y=0$$

دويم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\cos y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\sin y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cos x\cdot\cos y=a \end{cases}$$

ځرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دويم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x\sin y=1 \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\le a\le\sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\le a\le 1$$

د II معادلې کیڼ لورى د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x\sin y=1$ دى، بنا پر دې $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دى نو: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

همدارنگه پوهیږو چې $\cos\pi=-1$ دى.

نو: $\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow\cos(x-y)+1=2$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=2-1\Rightarrow\cos(x-y)=1$$
$$\cos(x-y)=\cos 0^\circ$$
$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad ,y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دى. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: **لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:**

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کیږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x - y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهیږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا:

$$\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$$

نو:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots \text{ II} \end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې يې ايږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $\quad -1 \leq \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول يې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x - y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} -$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-1\le\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\le 1$$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2\Rightarrow\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنگه چې $x-y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \;.....I \\ x-y=\frac{\pi}{2} \;.....II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$



پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a) \quad \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b) \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

د خپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنۍ اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی یې b, a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د $\tan$ قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د $\tan$ له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځېر سره ولولئ، هرې پوښتنې ته ځلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A = 20^\circ$ ، $b = 10$ ، $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالى يې عبارت دى له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a = 8$ ، $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A = 48^\circ$ ، $B = 22^\circ$ او $a = 5$ وي د b اوږدوالى عبارت دى له:

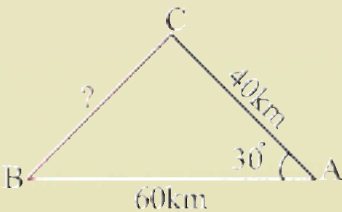
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دى له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\frac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A = 30^\circ$ ، $c = 8$ ، $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پیدا کړئ.
2. که په یوه مثلث کې $a = 8$ ، $b = 5$ ، $c = 10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پیل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له یوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلى وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. $\cot^2 \beta$ د $\sin \beta$ او $\cos \beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

دريم څپرکی

فضايي هندسه

د اقلیــدس تــصویر چــې نومــوړی د دوه بُعــدی او
درې بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.



اساسي مفاهيم او اکسيومونه



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.

هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنۍ اصطلاح‌گانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاح‌گانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط:کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيرېدلای شي مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط ځرګندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې ځرګندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

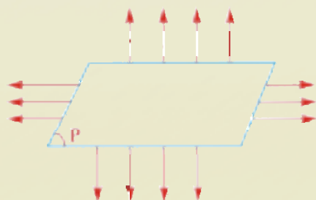
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم ځرګندوي او مستوي د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

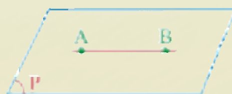
دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

دريم اصل: که چېرې د يوه مستقيم خط دوې نقطې په يوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسميدلوته اړتيا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر يو يې يوه مستوي څرگندوي رسميږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتيا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي يوه نه، بلکې ډېرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطيل او يا هوارې سطحې په واسطه ښودل کيږي او په يوه کونج کې يې يو توری ليکي.



نا محدوده مستوي



محدوده مستوي



مستوي نه ده

دا مستوي گانې چې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي‌گانې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي هغه متوازي الاضلاع او مستطيل نه دي، بلکې د مستوي په يوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعماليږي، په فضايي هندسه کې هم استعماليږي.

هغه اکسيومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسيومونو څخه کار اخيستل کيږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم يو لړ ځانگړي اکسيومونه شته چې په لاندې ډول بيانيږي.

د مستوي لومړنی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هغو دريو نقطو څخه چې په يوه مستقيم خط واقع نه دي، يوازې او يوازې يوه مستوي تېريږي.

د متقاطع مستوي‌گانو اکسيوم: که چيرې دوې مستوي‌گانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو گډ مستقيم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي‌گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه پېژنو.

لومړی اصل: دلايتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دويم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

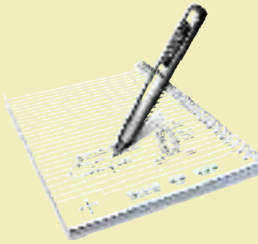


پوښتنې

1. څرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکي مېز په پرتله ټينگ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاحگانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي‌گانې تېريدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لرې؟



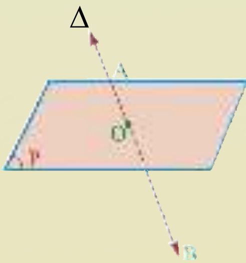
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

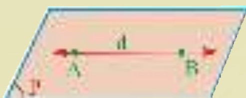
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

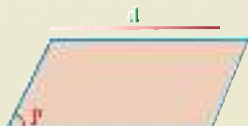
1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



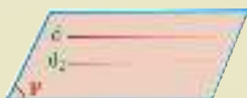
3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.

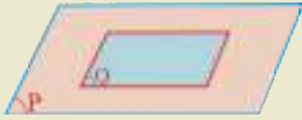


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟

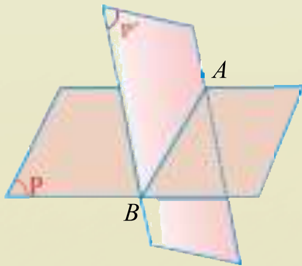


د دوو مستوي‌ګانو نسبي حالت:

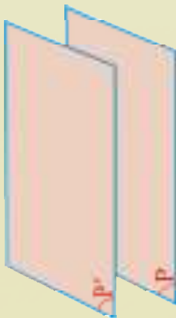
په عمومي ډول دوې مستوي‌ګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چېرې دوې مستوي‌ګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولرې چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستوي‌ګانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستوي‌ګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستوي‌ګانې یو ګډ مستقیم خط ولرې متقاطع مستوي‌ګانې بلل کیږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستوي‌ګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي‌ګانې.

فعالیت

- په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟



پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

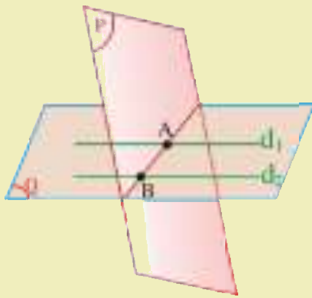
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوې کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي‌ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسيوم:له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

فعاليت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی وربانديې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستويګاني تېريدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

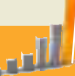
قضيه: د يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.



فعاليت

دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او يوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونيسئ.

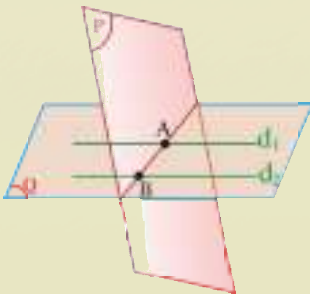
- آيا د d_1 او d_2 مستقيم خطونه يوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آيا د P مستوي به د d_2 مستقيم خط هم قطع کړي؟
- آيا دوې مستويګانې يوه بله د يوه مستقيم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: که دوه مستقيم خطونه موازي وي او مستوي يو له هغو څخه قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 يو له بل سره موازي مستقيمونه د Q په مستوي کې پراته دي.

که د P مستوي د d_1 مستقيم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقيم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعريف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه يوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A يوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستويګانې يوه له بل په يوه نقطه کې قطع کړي، نو ويلای شو چې هغوی يو بل د يوې مستقيمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستويګانې د d_2 مستقيمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.



ځکه يو مستقيم خط چې په يوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه يو قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.



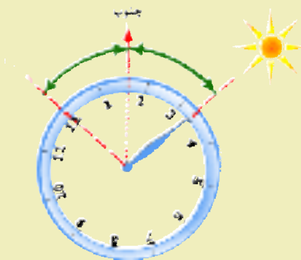
پوښتنې

1- که چېرې دوه مستقيم خطونه له يوه دريم مستقيم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقيم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چيرې د E او F مستويګانې سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آيا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه



که چېرې د یوې زاویې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عین لوري) وي زاویه منفي ده.

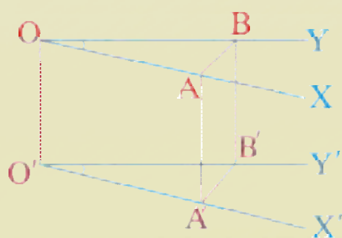
فعالیت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعې یې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې ووایاست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

قضیه: په فضا کې دوې زاویې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.

ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې په پام کې نیسو، داسې چې $\overline{O'X'}//\overline{OX}$ او $\overline{O'Y'}//\overline{OY}$ دي، یو لوری هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.



نو د $OAA'O'$ شکل یوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم یوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{OA}=\overline{A'O'}$ او $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ دي

له دې امله $A\hat{O}B=A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضیې پایله:

i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعې موازي او هم لوري وي، نوموړې زاویې یو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالی 180° دی.(ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

تعریف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاویې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي



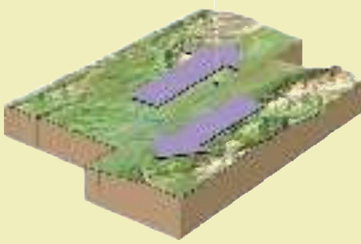
پوښتنې

1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې ضلعې سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعې یو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت یې کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاویې سره موازي او یا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي ګانې



یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

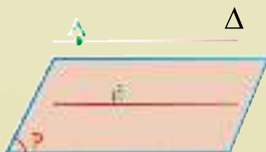


فعالیت

که چېرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کیدلای شي؟

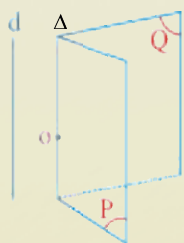
- دوې د P او Q متقاطع مستويګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستويګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
- د d مستقیم(مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کیدای شي؟
- له یوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستويګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستقیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

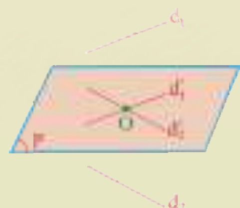
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستوي‌ګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستوي‌ګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

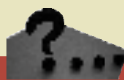
که د P، Q د مستوي‌ګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستوي‌ګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



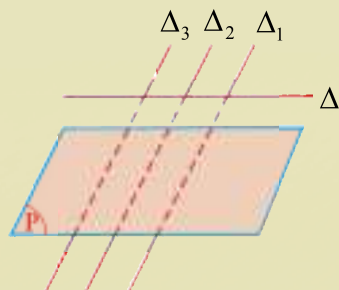
ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.



پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستوي‌ګانې له هغو سره رسمولای شئ؟



2- که چېرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې



که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟



فعالیت

- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنې عمودونه دي، نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنی په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې د X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌گانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي گانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

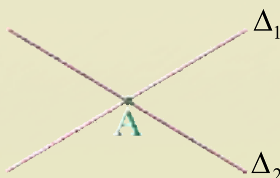
په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.



فعالیت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تېرولی شو.

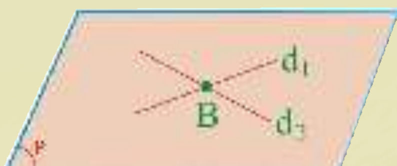


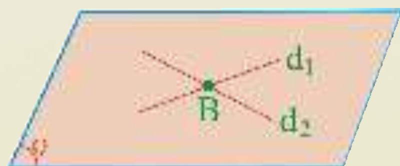
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

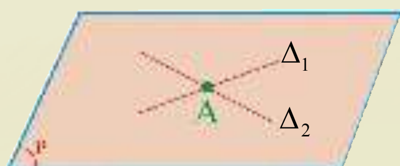
د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوې دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.







 څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي ګانې يو بل سره قطع کړي، مشترک فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقيم خطونه متقاطع دي، په نتيجه کې د P او Q مستوي ګانې يوه بله سره قطع کولای نشي، نو يو بل سره موازي دي.



پوښتني

که چېرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقيمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقيمه کرښه د F په مستوي کې پرته وي، آيا $L_1 // L_2$ دی؟

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم: که چېرې دوه مستوي ګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاویې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستوي ګانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې: دوې مستوي ګانې، چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.



د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a ـ د AB له خط سره موازي دی

b ـ د AB خط يې له منځه تېرېږي

c ـ د AB خط عمودي ناصف دی

d ـ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a ـ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b ـ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c ـ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d ـ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېرېږي له:

a ـ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دي.

b ـ له دوو متقاطع خطونو څخه

c ـ د يو خط او د هغې له خارجې نقطې څخه

d ـ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a ـ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d ـ که دوې مختلفې مستوي‌ګانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي‌ګانې د ياد شوي ټکي په امتداد کې شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0 b) 1 c) 2 d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

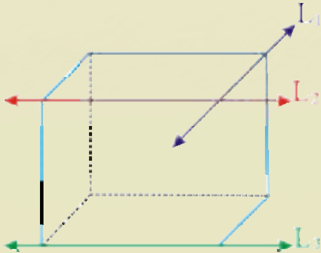
c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستوي‌ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

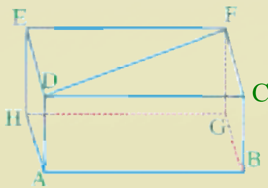
1- که چېرې د E او F مستوي ګاني يوله بله سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دي؟

2- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپـل منـځ کـې عمـود کيـدای شي.



3- پـه لانـدې مـستطيل کـې د L_1, L_2 او L_3 خطونـو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يې مـوازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

4- که د P_1 او P_2 مستوي‌ګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟



5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.

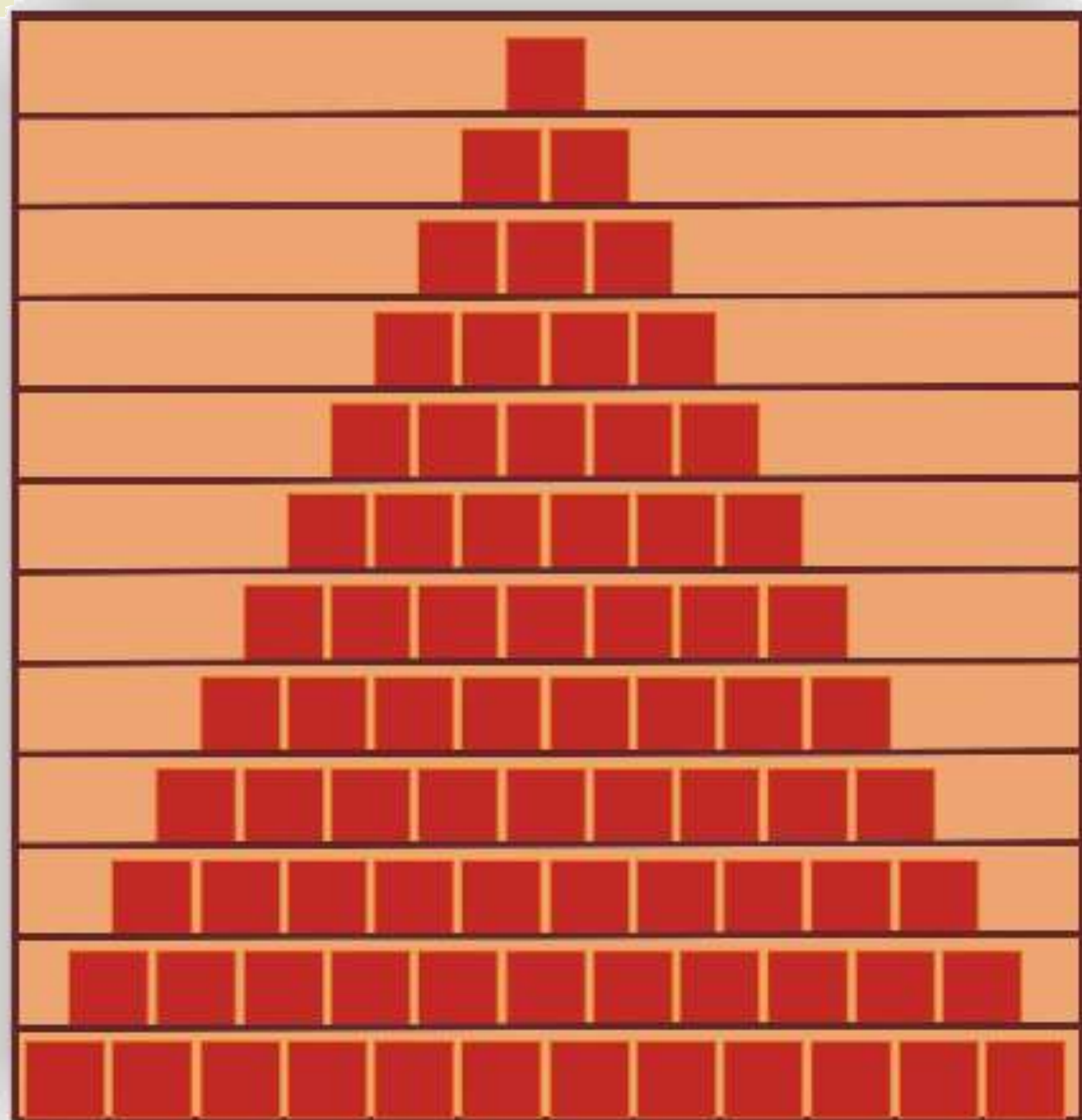
a _ د دوو مستوي‌ګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او ووايـئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعـه خطونـو، نومونـه واخلـئ چـې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده. d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې



ترادفونه

Sequence



په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي،
یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ام حد دی.

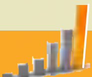
د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \ldots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \ldots ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20, \ldots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$



فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه:
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:
د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$

حل:

$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$

ليدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد دی، همدارنګه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $1,2,4,8...$ ترادف په پام کې ونيسئ او $n-$ ام حد يې پيدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد يې $an = 2^{n-1}$ دی.

دريم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$



پوښتني

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\ \dots \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادېږي.



فعالیت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حد ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کیڼې څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

تعریف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزاید دی.

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d = 0-4 = -4 \\ d = -4-0 = -4 \\ d = -8-(-4) = -4 \\ d = -12-(-8) = -4 \\ d = -16-(-12) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

څرنګه چې $d < 0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد یې $a_1 = \frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d = 2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$$a_1 \, , \, a_2 \, , \, a_3 \, , \, \ldots$$

$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د $a_1 \, , \, a_2 \, , \, a_3 \, , \ldots \, , a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1 \, , (a_1 + d) \, , \quad (a_1 + 2d) \quad , \quad (a_1 + 3d), \, \ldots$$

$$\frac{3}{2} \, , (\frac{3}{2} + 2) \quad , \quad (\frac{3}{2} + 2 + 2) \quad , \quad (\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2), \, \ldots$$

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{7}{2} \quad , \quad \frac{11}{2} \quad , \quad \frac{15}{2}, \, \ldots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a) \; 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \, \ldots$$

$$b) \; 1, 2, 4, 8, 16, \, \ldots$$

a د **جزء حل**: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګڼه توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:



$1 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 8 \;,\; 16$

$d = 2 - 1 = 1$

$d = 4 - 2 = 2$

$d = 8 - 4 = 4$

$d = 16 - 8 = 8$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګڼه توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګڼه توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو،ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ldots$ ترادف په پام کې نیسو.

$5, 7, 9, 11, \ldots$

$d = 7 - 5 = 2$

$5, 5+2, 5+2\cdot 2, 5+2\cdot 2\cdot 2, \ldots$

$a_1 = 5,\; a_2 = 5+2\cdot 2,\; a_3 = 5+2\cdot 2\cdot 2, \ldots$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_1, (a_1+d), (a_1+2d), (a_1+3d), \ldots$

په عمومي ډول لیکلای شو چې:

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه . . . , 12 , 5 , 2− حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ d = 5-(-2) = 7 \\ n = 30 \\ a_{30} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{array}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , \dots ,2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$a_n = a + (n-1)d$$
$$2000 = 35 + 5n - 5$$
$$2000 = 30 + 5n$$
$$2000 - 30 = 5n$$
$$1970 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = 394$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \end{array}\right\}$$

فعالیت 

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d = 4, a_1 = -11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n = 2,3,4$ دی.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd]$$
$$= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd]$$
$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}}, \underbrace{2x-4}_{a_n}, \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3x+3+2x+1}{2} = \frac{5x+4}{2}$$
$$4x - 8 = 5x + 4 \quad \Rightarrow\ 4x - 5x = 4 + 8 = 12 \quad \Rightarrow\ -x = 12$$
$$x = -12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1 \quad , \quad 2(-12)-4 \quad , \quad 3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3 \ \Rightarrow\ -23, -28, -33, -38, -43, \ ....$$

یادښت

که د یوه حسابي ترادف n – ام او m – ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n = a + (n-1)d \quad .... \ I$$
$$a_m = a + (m-1)d \quad .... \ II$$

نـو د I اړیکـې څخـه II اړیکـه کمـوو، پـه پایلـه کـې کـولای شـو ګـډ تـوپیر داسـې پـه لاس راوړو $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په ياد شوي فورمول کې d ګډ تـوپير، a_n د تـرادف $n-$ام حد، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

دريم مثال: د يوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد يې 47 دی، ګډ تـوپير او لـومړی حـد يـې پيـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه وليکئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47 \\ n=9 \\ a_m=27 \\ m=5 \\ d=? \\ a=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}=5 \\ d=5 \\ a_n=a_1+(n-1)d \quad \Rightarrow\ 47=a_1+(9-1)5=a+40 \\ \Rightarrow\ 47-40=a_1 \quad \Rightarrow\ a_1=7 \end{array}$$

ترادف يې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونيکي ترادف: د $\{a_n\}$ يوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس يې $b_n=\frac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د $2,4,6,8,10,\ \dots$ تـرادف يـو حـسابي تـرادف دی، ځکـه چـې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس يعنې $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\dots$ يو هارمونيکي ترادف تشکيلوي.

دويم مثال: د طبيعي عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی. $n-$ ام حد يې وليکئ.

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots\ ,\frac{1}{n}$

$\{a_n\}=\frac{1}{n}$

دریم مثال : که چېرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$



پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 - ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$ ، $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

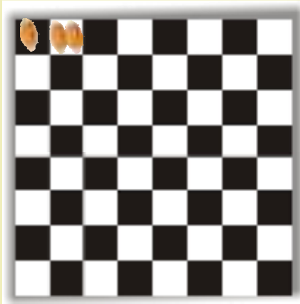
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\ , \frac{9}{4}\ , \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, ...$

$b)\ 3\ , 6\ , 9\ , 12,\ ...$

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې د مخکنی خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعني:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د ... , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګډ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

96	48	24	12	6
	$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$	$q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$	$q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$	$q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

لیدل کیږي چې $q=\frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وي.



- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د ...,100 ,300 , 900 , 2700 هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{ګډ نسبت} = q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

n - ام حد		خلورم حد	دریم حد	دویم حد	لومړی حد
a_n	, ... ,	a_3	a_3	a_2	a_1
$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$a_1 q^{n-1}$	, ... ,	$a_1 q^3$	$a_1 q^2$	$a_1 q$	a_1

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دويم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د a , M او b , M ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ويلی شو کـه چېرې a او b دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د M حقيقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط (Geometric mean) وايي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$


فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \;,\quad x+3 \quad,\; x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad\Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad\Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \;,\; x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$



پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4,\ \ldots$

3- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطیو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ؟



- د $2,4,6,8,\ \ldots$ ترادف په پام کې ونیسئ.
- د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
- د لس لومړیو پرله پسې حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
- د $n-$ام حد د جمعې حاصل ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه یې ولیکو، نو ځکه یې دوه یا درې لومړی حدونه لیکو او وروسته له دریو ټکو $n-$ام حد لیکو.

څرنګه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړیو حدونو $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښیي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبیعی عددونه اخلي، i د انډکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i,n,k,j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdot\cdot\cdot + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum \frac{1}{1^i}$) $\sum_{i=1}^{7}$ په انکشافی شکل ولیکئ.

حل:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$$

دويم مثال: لاندې د جمعي حاصل د ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = ?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = 4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)$$
$$= 4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ldots+n(n+2)$$
$$= 24+35+48+63+\ldots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} = \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9}$$
$$= \frac{4032+3888+3780+3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}$$



تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړه، که وغواړو د یوه ترادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خو په ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولو سره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نوموړې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k
\end{aligned}$$

مثال: د $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots\ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$



پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2 + 5i)$

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي مجموعه

که $a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots ,a_n$ یو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ د یوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

$a_1=$
$d=$
$a_n=$
?
$1+2+3+4+\ldots+n=$
$\frac{n}{2}\cdot[2a+(n-1)\cdot d]$

که چېرې دیوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ویل کېږي. یاپه بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وایي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې a ګډ فرق یې d او اخیري حد یې a_n وي، د حدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S=a+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_{11}+3d)+\ldots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad \ldots \text{I}$$

$$S=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+\ldots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \quad \ldots \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n \text{ خلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \;\Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\ldots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښیي چې لومړی حد، اخیري حد اود جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$a_1 = 4$

$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \dots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او $n-$ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \quad \dots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\dots)$ د 200 لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د $2+4+\dots+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.



پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

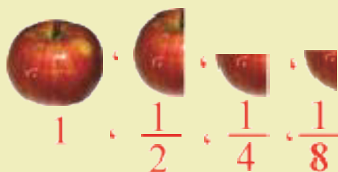
$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که یو ترادف د $\ldots\ \ 2,5,8,11,$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل



که چېرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل یې مساوي په 2 منو شي.

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنی اړیکې ثبوت کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ ... \ + a_1q^{n-1} \quad .... \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ ... \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad .... \ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتني رابطې صورت او مخرج په (1-) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنی اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

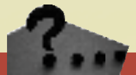
دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \;\Rightarrow\; 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \;\Rightarrow\; (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.



پوښتنې

1. په ... $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9},$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په ... $4, 12, 36,$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنۍ کېږي.

آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چېرې $|q| < 1$ وي، د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل

عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدیې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت یې $\frac{1}{100}$ دی.

په پاسنۍ سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$
$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنۍ سلسله کې $a=0.3$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$



پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو

ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی

ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي،

د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1} , a_n , a_{n+1} په داسې حال کې چې

$n = 2, 3, 4, \ \ldots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n = \sum\limits_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه

یادېږي.

او د $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهایت هندسي سلسلې: په یوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل یې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کیږي او قیمت یې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمیر یې هم بې نهایته وي، سلسله متباعد او د n لومړیو جملو مجموعه یې هم بې نهایته ده، یعنې $S_n = \infty$



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه شخه کړی تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ ترادف $n-$ ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ $d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \dots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $b)\ 38$ $c)\ -35$ $d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \dots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $b)\ 0.1$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \dots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{510}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ $d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $b)\ |q|>1$ $c)\ |q|<1$ $d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د ځلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \square, \square, \square, 31$

3. که ديوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ ...$$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.

6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د ځلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ...$$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

10. د $... + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

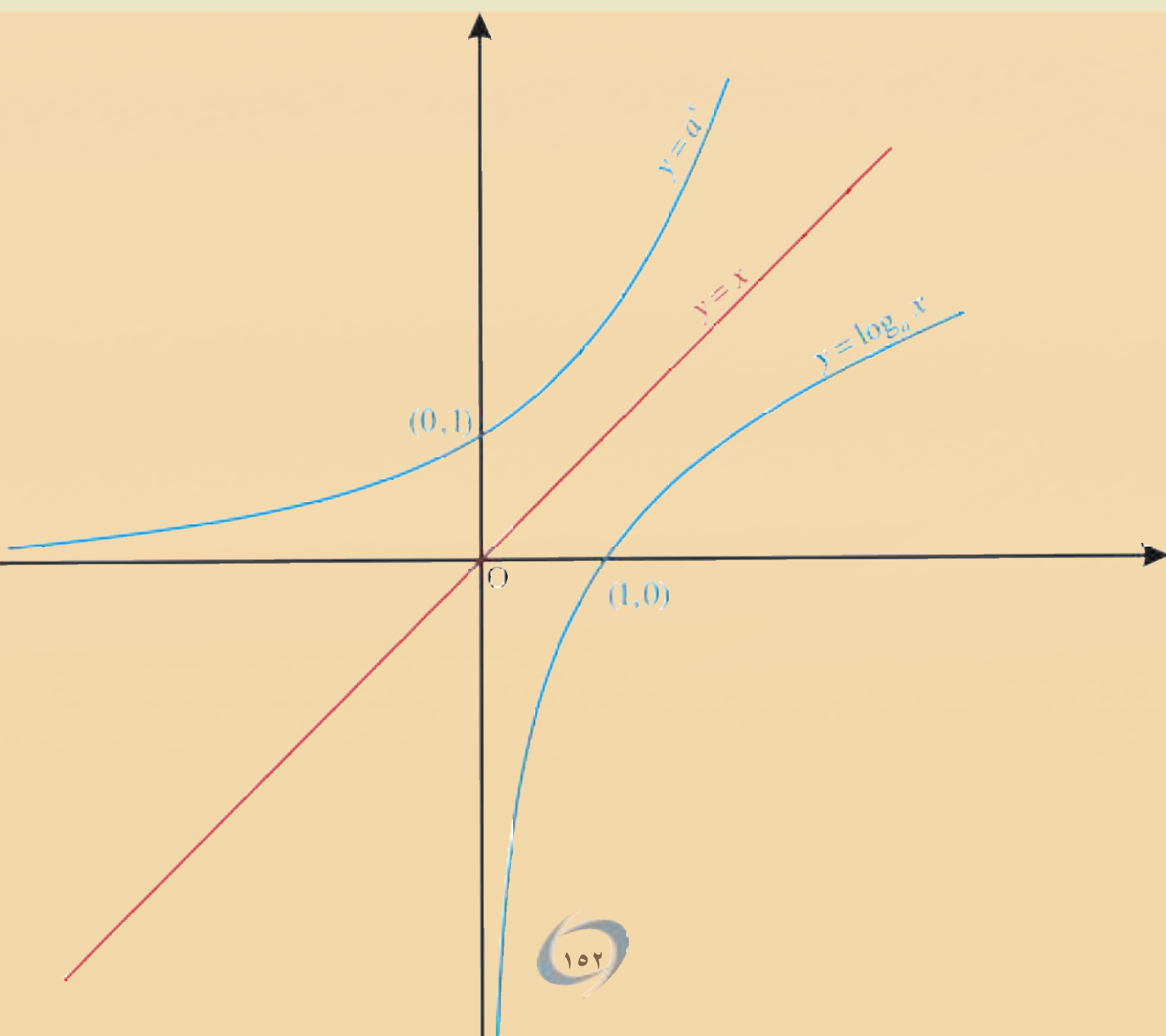
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad$ $b)\ 3.\overline{57}$

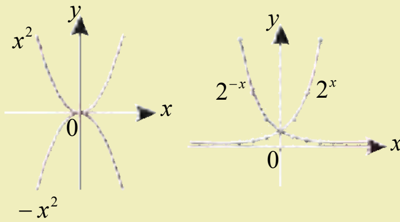
پنځم څپرکی

لوگاریتم


y = a^x
y = x
y = log_a x
(0,1)
O
(1,0)

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function



پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته یوله بل سره متناظر دی. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چېرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f:\ IR\to IR^+$$

$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانې د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتوپه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

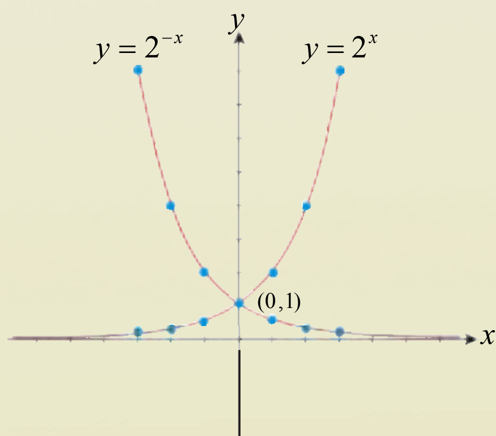
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یویه یو متناظر دی.

یاددښت: که چېرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y = 2^x$ او $y = 2^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو.



د $y = 2^x$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

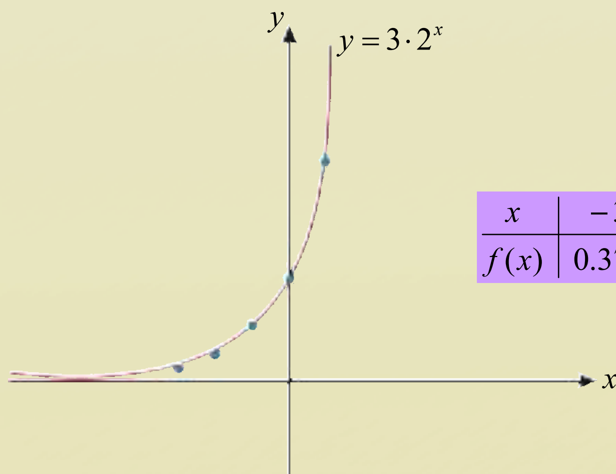
د $y = 2^{-x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

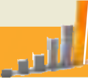
مثال: د $f(x) = 3\cdot 2^x$ اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

حل: د پايلي په پام کې نيولوسره پوهېږو چې د $f(x) = 3\cdot 2^x$ اکسپوننشيل تابع قاعده $a = 2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشيل تابع متزايده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشيل تابع گراف دقيق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قيمتونه ورکوو د y قيمتونه پيدا او په يوه جدول کې يې ليکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قايمو مختصاتو په سيستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته يې گراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24



فعالیت

- د $f(x) = a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص پـه لانـدې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.

2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a > 1$ لپاره متزایده او د $a < 1$ لپاره متناقصه ده.

4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تېرېږي.

5. د $f(x) = a^x$ او $g(x) = a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي

6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.



پوښتني

دلاندي اکسپونشيل تابع ګانو ګرافونه په قايمو مختصاتوکي رسم کړئ.

$a)\qquad f(x)=2\cdot 3^{x}$

$b)\qquad f(x)=2\cdot 3^{-x}$

$c)\qquad f(x)=(\frac{1}{2})^{x}$

$d)\qquad f(x)=(4)^{-x}$

لـوګاریـتم

Logarithm

آیاکولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړکړئ

درکړل شوي عددونه $= y$	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$		10^{-3}				10^4
توان $= x$	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې بڼې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکي عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$



پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

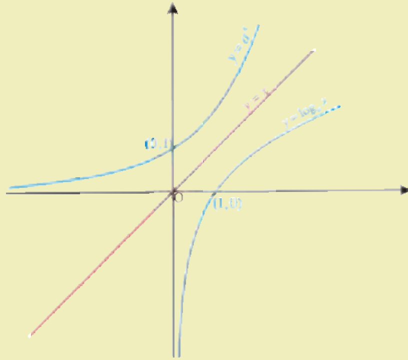
$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

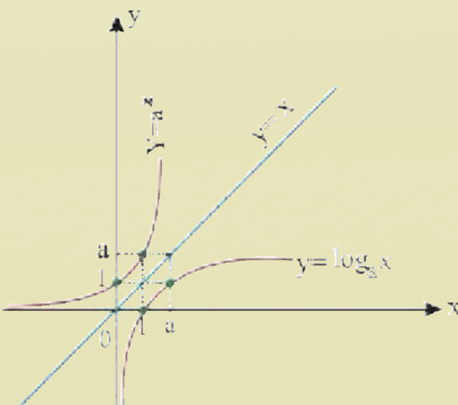
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \to IR \, , f^{-1}(x) = \log_a x, \; a \in IR^+ \, , \; a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

له پورتني جدول شخه ليدل کېږي:

که چېرې $a > 1$ وي، نود $\forall x_1 , x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع گراف د $x = 0$ لپاره $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابع‌گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نيسو:

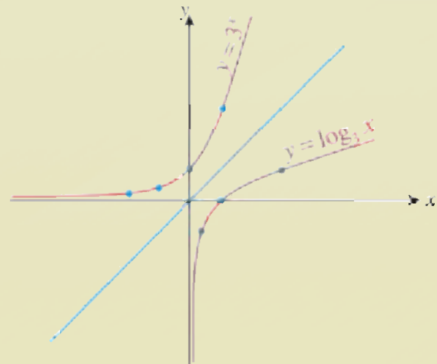
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نيسو:

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{matrix}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{matrix} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{matrix}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{matrix}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1




فعاليت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشيل تابع‌گانود گراف په پام کې نېولو سره او د اکسپوننشيل تابع‌گانو د تعريف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوگاريتمي تابع‌گانو قيمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پيدا کړئ او نتيجه يې په عمومي ډول وليکئ.

پايله: د هرې لوگاريتمي تابع لکه: $y = \log_a x$ د يوې اختياري قاعدې لپاره لرو.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړی.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمې تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیږي.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

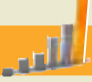
څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

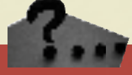
$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2(\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$



فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.



پوښتني

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي، او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N\\ \log_{10}10^3\end{array}\right\}=?$$

تعريف

ځرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کيدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خوپه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 – معمولی لوګاريتم: هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا (Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سيستم منځ ته راوړی دی

معمولی لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

$$f: IR^+ \longrightarrow IR\ ,\quad f(x)=\log_{10}x=\log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10}10^0 x=\log 10^0=y \Leftrightarrow 10^y=1 \Rightarrow 10^y=10^0 \Rightarrow y=0$$

$$\log_{10}10=\log 10 \ =y \Leftrightarrow 10^y=10^1 \Rightarrow y=1$$

$$\log_{10}10^2=\log 10^2=y \Leftrightarrow 10^y=10^2 \Rightarrow y=2$$

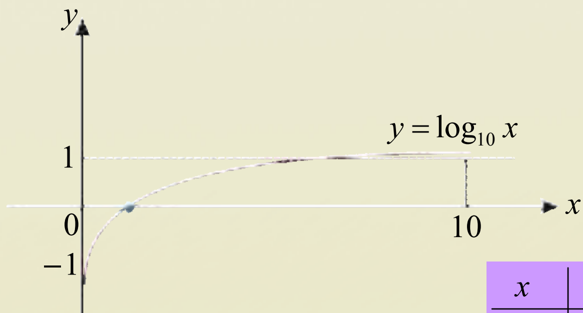
$$\log_{10}10^3=\log 10^3=y \Leftrightarrow 10^y=10^3 \Rightarrow y=3$$

$$\log_{10}10^{-1}=\log 10^{-1}=y \Leftrightarrow 10^y=10^{-1} \Rightarrow y=-1$$

$$\vdots$$

$$n\in z\ ,\quad \log_{10}10^n=\log 10^n=y \Leftrightarrow 10^y=10^n \Rightarrow y=n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسی لیکو: $f: IR^{+} \to IR, F(x)=\log_e x=\ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x)=e^{x}$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^{x}$

د $y=e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y=a^{x}$ تابع ګراف په څېر ده.

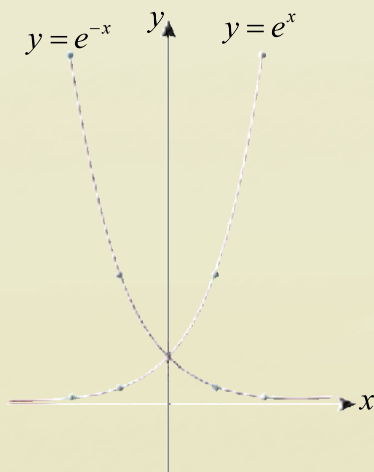
د $y=e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو. د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د



د طبیعي لوګاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتوکې لکه: ساینس، انجنیري، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري.

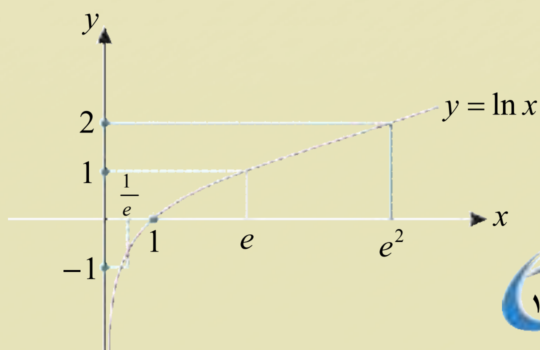
د طبیعي لوګاریتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}$ $\ln e^{0}, \ln e^{3}, \ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:





فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e^7}$ قیمت پیداکړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.



پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $b)\ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $d)\log \frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

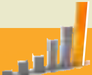
پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$



فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ \, , \, a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}, \, a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\} \, , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې ولرو.

$$x = a^p \quad \ldots \; \text{I}$$

$$y = a^q \quad \ldots \; \text{II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنی اړيکې له دواړو خواوو لوګاريتم نيسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاريتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دويم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$



فعاليت

- دلاندې غير مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښاياست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون:د دوو عددونو د تقسيم لوګاريتم د لوګاريتمونو له تفاضل سره مساوی دی، يعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \text{..........} \; I \\ y = a^q \text{.........} \; II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا يو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنی اړيکې له اطراف څخه لوګاريتم نيسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: ځلورم قانون له ښي لوري خخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$

$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$

$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونكي عدد لوګاريتم مساوي دى د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاريتم لـه حاصل ضـرب سره يعني كه چيرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دى.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{lag_a x \text{ خلي } n}$$

په پايله كې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون خخه په ګټې اخيستنې سره كولاى شو وليكو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړى مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پيدا كړئ؟

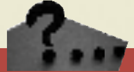
حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$



فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداكړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\log_5\sqrt{8} = ?$



پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

$d)\ \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \frac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \frac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، څرنګه کولای شو، نومورې عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل یې یعنې $m = b^y$ لیکـو اوس لـه اطرافو څخـه د a پـه قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتنې اړیکه کې ایږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

يادونه: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاريتم څخه چې هغه د کو لوګاريتم (co-logarithem) په نامه ياد يږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نيسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 ... I$

د I په رابطه کې د 1 عدد په ځای ليکلی شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاريتم نيسو يعني $\log_a M = x$

په پورتنی اړيکه کې د x په ځای قيمت ايږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$



فعاليت

لاندې لوګاريتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: ديوه عدد لوګاريتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نيسو او هغه داړوند طاقت په شکل ليکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاريتم نيسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

1) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ 2) $\log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x$ 3) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$



فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعني د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چېرې $b=e$ او $a=10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x=\frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x=\log x=\log_e x\cdot\log_{10} e$$

$$\log x=\log_{10} e\cdot\ln x$$

ځرنګه چې $\log_{10} e=0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

لومړي مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x=2.3026\cdot\log x$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot\log 4.69$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot 0.6712=1.5455$$

دویم مثال:د $\log 6.73$ قیمت پیداکړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73=1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لروچې:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

$$\log 6.73=0.4343\cdot\ln 6.73$$

$$=0.4343\cdot 1.9066=0.8280$$



پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4}=?$ $b)\ \log_9 27=?$

$c)\ \log_8 4=?$ $d)\ \log_{121} 14641=?$

$e)\ \ln 672000$ $f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10}1000=3$, $\log_{10}100=2$, $\log_{10}1=0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x=S\cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1\le S<10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x=\log(S\cdot 10^n)=\log S+\log 10^n=\log S+n\log 10=\log S+n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1\le S<10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1\le S<10$ دي نو.

$$\log 1\le\log S<\log 10$$
$$0\le\log S<1$$

له پورتنۍ اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمي یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړ کړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001=10^{-3}$	$0.01=10^{-2}$	$1=10^{0}$	$1000=10^{3}$	$4=10^{0.602}$	$7=10^{0.845}$	$10=10^{1}$	$20=10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10}0.001$		$\log_{10}1$			$\log_{10}7$		$\log_{10}20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100 ,1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10 د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل:

$a)\quad 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)\quad 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)\quad 0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمېر له 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک یې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2



پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)$ $\log 0.9560$

$b)$ $\log 956.0$

$d)$ $\log 2345$

$e)$ $\log 3.875$

$c)$ $\log 9560$

$f)$ $\log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو (کرکټرسټیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{matrix}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{matrix}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر څېنې 7 ، تر 5 او څېنې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نومړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکټرسټیک ← 2

د 2 عدد د کرکټرسټیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نومړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دويم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړئ؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 7.09 عدد مـانتيس 0.8506 دی، په پايله کې يې لوګاريتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دريم مثال: د 0.0247 لوګاريتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

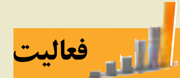
$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عـدد پـه 24 – ام سـطر او 7 – ام سـتون لانـدې لټـوو چې لـه 3927 عـدد سـره مطابقـت کـوي يعنـې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، کـه کرکټرسـټيک منفـي وي او وغـواړو دواړه د يـوه مثبـت عـدد پـه شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرسټيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$



فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عـددونو لوګاريتمونـه پيـدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$



پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $\quad$ $b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\quad$ $d)\ \log 527$

$e)\log 0.024$ $\quad$ $f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $\quad$ $j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\quad \log(2.73)^3$ $\qquad$ $b)\quad \log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرستیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې د 2 د کرکټرستیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېر یې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دویم مثال: که چېرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څیر لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کی لیدل کېږی چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټرستیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)$ 2 $b)$ 0.2 $c)$ 0.02 $d)$ 0.0002

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغېزه نه لري.

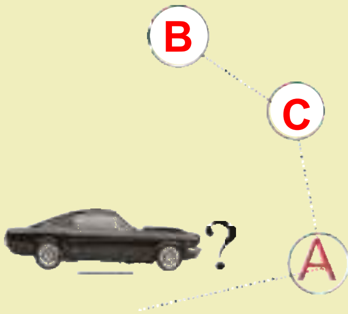
پوښتنې

دلاندې هر یوه انتي لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



يوګرځندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقوکې د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، ووایاست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

فعاليت

- که چېرې $\log B = b, \log A = a$ راکړل شوی وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول ووایاست چې که (a, b) يوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاریتم چېرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پايله: که چېرې ديوه نامعلوم قيمت د پيداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه يادېږي.

که يو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$\log 5.230 = 0.7185$

$\log 5.240 = 0.7193$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$

$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$

که چېرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونيسو ، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$\begin{array}{ccc} & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \\ & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & 5.235 & x \\ & 5.230 & 0.7185 \end{array}$$

د عددونو توپیر 0.010 — 0.005 — d — د لوګاریتمونو توپیر 0.0008

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$

$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\&=\log 7.957+\log 10^{-4}\\&=\log 7.957-4\log 10\\&=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$

$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

	عددونه	لوګاریتمونه	
د عددونو توپیر 0.01	7.96	0.9009	0.0005 د لوګاریتمونو توپیر
0.007	7.957	x	d
	7.950	0.9004	

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $anti\log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنۍ اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تېرې په شان تشکیلوو.

	عددونه	مانتیسونه	
د عددونو توپیر 0.01	3.59	0.5551	0.0012 د مانتیسونو توپیر
d	t	0.5544	0.0005
	3.58	0.5539	

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$
$= 3.5842$
$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$
$\log x = \log 35842$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$x = 35842$



پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad b)\quad x = \log 6.289$

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32\Rightarrow 2^{x-1}=2^5\Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$

$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4\Rightarrow 9x=4+3$$

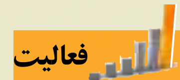
$$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; 8^{\frac{4}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; (2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4 \quad \Rightarrow \; 2^4=2^4$$



فعالیت

- په $16^{x+1}=64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږی. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1)=3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2-1=2^3$$

$$x^2=1+8=9$$

$$x^2=9 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{9} \quad , \qquad x=\pm 3$$

دویم مثال:په $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x+2 = 81 \Rightarrow x = 81-2$$
$$x = 79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$
$$(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

که $3^x = t$ وضع کړو،نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$
$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$



پوښتنې

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت پېدا کړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاري عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو ددوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتيسونه		
د عددونو توپير 0.01	2.79	0.4456		د مانتيسونو توپير 0.0016
d	t	0.4466	0.0006	
	2.80	0.4472		

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی ؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نومورو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.



فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې : $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم لـه لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.



فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعنې $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.



فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.



پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومېږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د (0،1) له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادېږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د (1،0) له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمې تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې $y = anti\log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادېږي.



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا اوله هغه څخه کرې تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 9$

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یاکرکټرستیک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. د یوه عدد دلوګاریتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $d)$ هیڅ یو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^{x} = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)0.8954$ $c)4.5682$ $d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $b)\ 91$ $c)3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$



د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

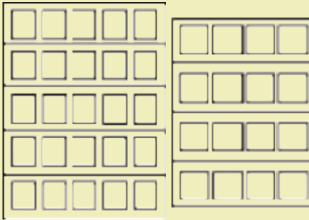
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

شەرم خۆرکی

مەریکسونە

متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لوېي ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هر یو د p',p او s',s دټکوبدل شوي وسیله ده.

لاندې هرې یوې وسیلې ته (چې دټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مټریکس وايي.

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

تعریف:د شیانو، عددونو یا تورو ګېډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د ... A,B,C مټریکس ښیي او واړه حروفونه ... a,b,c د مټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یولاندی جدول یو مټریکس په ګوته کوي.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-3&7&5\\-4&2&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3}&7&-2\end{pmatrix}$$

که چېرې a د یوه مټریکس په $i-$ام کرښه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښودل کېږي چې i او j طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3... \quad , \quad j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}...a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}...a_{2n}\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times1}$ ، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a)\qquad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2} \qquad\qquad b)\qquad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$

په پايله کې غوښتل شوی مټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دوهمه مرتبه مټريکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر يو په يو سره مساوي وي، مثلاً:
$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت يوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آيا $(2 \quad 1)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټريکسونه يوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟



پوښتنې

1. د لاندې مټريکسونو مرتبې وليکئ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. لاندې مټريکسونه د مستطيلي جدول په شکل وليکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times 3} = (2i+3j)_{3\times 3}$ $\quad b)\ (a_{ij})_{2\times 3} = (\frac{i}{j})_{2\times 3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکســـونومخامخ شـــکلونه څـــو ســـطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمېټريکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

1. **سـطري مېـټريکس**(Row Matrix)**:** هغـه مېـټريکس چـې يـوازې او يـوازې يـو سـطر ولـري، سـطري مېټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times4}$

2. **ستوني مېټريکس** (Column Matrix)**:** هغه مېټريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times1}$

3. **صفري مېټريکس**(Null matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

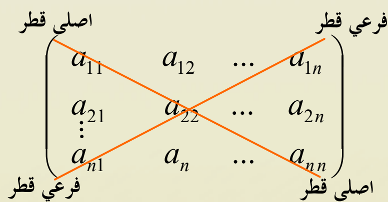
$$0_{2\times4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2\times4} \qquad 0_{3\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}_{3\times2}$$

4. **مربعي مېټريکس**(Square Matrix)**:** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&9\\-1&0&2\end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \qquad m=n \;\Rightarrow\; 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \ldots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فعاليت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix): هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix): که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots 1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي مېټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې مېټریکس د مثلثي مېټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مېټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مېټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مېټریکس او B ښکتنی مثلثي مېټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مېټریکس:

که چېرې د A متقابل مېټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مېټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مېټریکس وي، نومتقابل مېټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$



پوښتنې

1. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

د متریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

$$A+A= \quad A-A= \quad A+B= \quad A-B= \quad B+B= \quad B-B= \quad ?$$

په مخامخ متریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

1) د متریکسونو جمع:

که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه متریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه متریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو متریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو متریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+2\\ -2+1 & 0+2\\ 1+0 & 7+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. د متریکسونو تفریق:

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو متریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مېټریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د مېټریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لرى، خو د مېټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د مېټریکسونو جمع او تفریق اتحادي خاصیت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مېټریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مېټریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B مېټریکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د مېټریکس مرتبه 3×2 او د B مېټریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټریکسونه د امکان تر بریده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په متریکس کې د سکالر ضرب

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square\end{pmatrix}$$

موږ د متریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ یو **متریکس** او K یو سکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{pmatrix}$ یو **متریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5\end{pmatrix}$ **متریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد متریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **متریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو KA د C له **متریکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب خاصيتونه:

که چېرې A او B دواړه د يو شان مرتبې مېټريکسونه، α او β دوه حقيقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښياست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

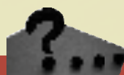
$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$



پوښتنې

1. کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکـړل شـوي وي. پـه مېټريکس کې د سکالر ضرب درې خاصيتونه تطبيق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پيدا کړئ.

د دوو مټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

اياد دوو مټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو مټريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعريف

دوه مټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړی مټريکس د ستونونو شمېر د دويم مټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مټريکس لومړی سطر د دويم مټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مټريکس دويم سطر د دويم مټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دويمه سطر کې يې ليکو، دغې عمليې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مټريکس په دويم مټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

لومړی پړاو

دویم پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\-1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\(-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\-2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&4\\-2&-2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}$ **وي** $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&5&21\\27&12&14\end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون پـه صـورت کـې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

خلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B, A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

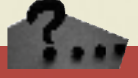
درېیم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$



پوښتني

د لاندي مټریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$$

د یوه مټریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادیږي؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولیږدوئ، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چیرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي مټریکس سره مساوي دی، نوی مټریکس په څه نوم یادیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ټرانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ټرانسپوز مټریکس په A^T ښودل کیږي. د ټرانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ټرانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=A$

د متناظر مټریکس پېژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ټرانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

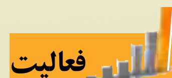
دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$



فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$(A - B)^T = A^T - B^T \;,\; (A + B)^T = A^T + B^T$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$



پوښتنې

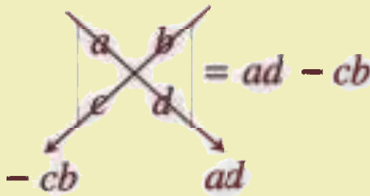
1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیټرمینانت

Determinant



په یوه عددي مثال کې یو مربعي متریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.

تعریف

که چېرې د A متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متریکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د متریکس دیټرمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کیږي.

په همدې ډول که چېرې د $n\times n$ مرتبې یو متریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند دیټرمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي متریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې متریکسونو د دیټرمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس دیټرمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\,d-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس دیټرمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$



فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس دیټرمینانت محاسبه کړئ.

د 3×3 مېټريکسونو د ډيټرمينانت محاسبه:د $A_{3\times 3}$ مېټريکس، ډيټرمينانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times 3}$ ډيټرمينانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانت محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانت محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ډيټرمينانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانت محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ډيټرمينانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\;a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\;a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\;a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې دیټرمېنانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعالیت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له دیټرمینانت څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: **د ساروس په طریقه د دیټرمېنانت محاسبه**: په دغه طریقه کې د دیټرمېنانت دوه لومړي ستونونه ښي لوري ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مېټریکس دیټرمېنانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لیږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمېنانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تیر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{فرعي قطر} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{31} & a_{33} & a_{32} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
\text{اصلي قطر} & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}$$

دویم مثال: د لاندې دیټرمېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$= \big(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\big)$$

$$= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمېنانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

د دیټرمینانت خاصیتونه

که چیرې په یوه دیټرمینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د دیټرمینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ او $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ دیټرمینانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ دیټرمینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ ، وروسته یې $|A^T|$ دیټرمینانت محاسبه کړئ او وښایاست چې $|A^T| = |A|$.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چیرې $A_{n\times n}$ یو میټریکس وي، د $|A|$ دیټرمینانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A دیټرمینانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2. که چیرې د $A_{n\times n}$ میټریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند دیټرمینانت یې مساوي له صفر سره دی.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

3. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A| = 0$ دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4. د A میټریکس دیټرمینانت او A^T میټریکس دیټرمینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول دیټرمینانت ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چېرې په یوه دیټرمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ دیټرمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمېنانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

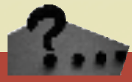
که د K یو ثابت عدد په دیټرمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمېنانت په لومړي ستون کې د 4 عددګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4 & 3 & 22\\ 2 & 2 & 21\\ 5 & 1 & 25\end{vmatrix}$$



پوښتنې

د دیټرمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}\qquad b)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad c)\ \begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

د 2×2 مرتبه يي مېټريكسونو ضربي معكوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

د a حقيقي عدد ضربي معكوس كوم عدد دى؟

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريكسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريكسونو د خاصيتونو په پام كې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريكس په پام كې ونيسئ او ديټرمينانت يې محاسبه كړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريكس د A له مېټريكس سره ضرب او پايله يې وليكئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولاى شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريكس په پام كې نيسو، كه چېرې د B مربعي مېټريكس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت كې د B مېټريكس د A د مېټريكس معكوس بلل كېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليكلى شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريكس ته منفرد مېټريكس(Singular Matrix) ويل كېږي، كله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريكس ته غير منفرد مېټريكس(non singular matrix) ويل كېږي، كه چېرې $|A|\neq0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريكس د معكوس مېټريكس لرونكى دى چې:

1. مېټريكس مربعي وي.
2. ديټرمينانت يې د صفر خلاف وي.

لومړى مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معكوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل كېږي چې: $AB=BA=I$ دى، نو A او B يو د بل معكوس دي.

الحاقي مېټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مېټريکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مېټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مېټريکس معکوس مېټريکس لري چې دیټرمېنانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مېټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مېټريکس یې پیدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A مېټريکس دیټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس مېټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مېټريکس چې دیټرمېنانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



پوښتنې

1. د لاندې مېټريکسونو څخه کوم یو مېټريکس معکوس لري.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مېټريکسونو معکوس مېټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس مټریکس څخه په کاراخېستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخېتسنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړې دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو مټریکس، د مجهولینو مټریکس، د ضریبونو او مجهولینو مټریکس ولیکئ.
- هر مټریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د مټریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لوري د ضریبونو مټریکس، B د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني مټریکس او X د مجهولو عددونو ستوني مټریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول يې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمېنانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.



پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخېستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$
$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$
$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیټرمینانت او له مجهولینو یعنې د z, y, x سره د متناظرو میټریکسونو د دیټرمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو میټریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو میټریکسونو دیټرمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوی میټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون د x ضریبونو په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې متریکس دیترمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د ځلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د متریکس دیترمینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې متریکس دیترمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & \vdots & 3\\ 2 & 1 & \vdots & 2\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سیستم د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=-9-4+4-12-6-2 \\ &=-21-8=-29\neq 0 \end{aligned}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=12-22+20-(66-8+10) \\ &=10-68=-58 \end{aligned}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{matrix} \begin{aligned} &=-15-8+22-(20+33+4) \\ &=-23+22-57=-58 \end{aligned}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د y, x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

فعالیت

دگرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل د گوس ($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له متریکس څخه په کار اخېستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

د گوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو متریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعاليت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \quad \Rightarrow \quad z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \quad \Rightarrow \quad -7y+21=7 \quad \Rightarrow \quad -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ابږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \quad \Rightarrow \quad 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$

$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$

$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$

$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$

$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2 \to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3 \to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ \quad -3y = -6 \end{cases}$

د شپږم ټولګي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه ګڼډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټریکس(Matrix) په نامه یادیږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس:** هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس:** هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس:** هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس:** هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه:** دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس:** هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس:** په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق:** د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$
2) $A-B\neq B-A$
3) $(A\pm B)\pm C = A\pm (B\pm C)$
4) $A+0=0+A=A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مېټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مېټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مېټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مېټريکس سره برابر وي.

د مېټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مېټريکس ترانسپوز مېټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مېټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټريکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مېټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مېټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مېټريکس: که په يوه مېټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټريکس د مثلثي مېټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مېټريکس: که د A يو مېټريکس له خپل ترانسپوز A^T مېټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مېټريکس ته متناظر مېټريکس وايي.

ديټرمېنانت: که د A مېټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټريکس له ديټرمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديټرمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی، يعنې:
$\det A = |A| = 0$
2. که د ديټرمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديټرمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټريکس او د A ترانسپوز مېټريکس ديټرمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مېټريکس په پام کې نيسو ،که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس دی او د A د مېټريکس معکوس مېټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مېټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- د ګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

.1 که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

.2 که $A=\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1\,,\frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad d)\ m\neq 1\,,\frac{1}{2}$

.3 که $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

.4 د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

(a د y محور $\quad$ (b د x محور $\quad$ (c $y+2x=0$ $\quad$ (d $y=0$

.5 د x په کومو قیمتونو دغه دیټرمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x=3,2$

.6 د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیټرمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مټریکسونو ضرب د درو مټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیټرمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

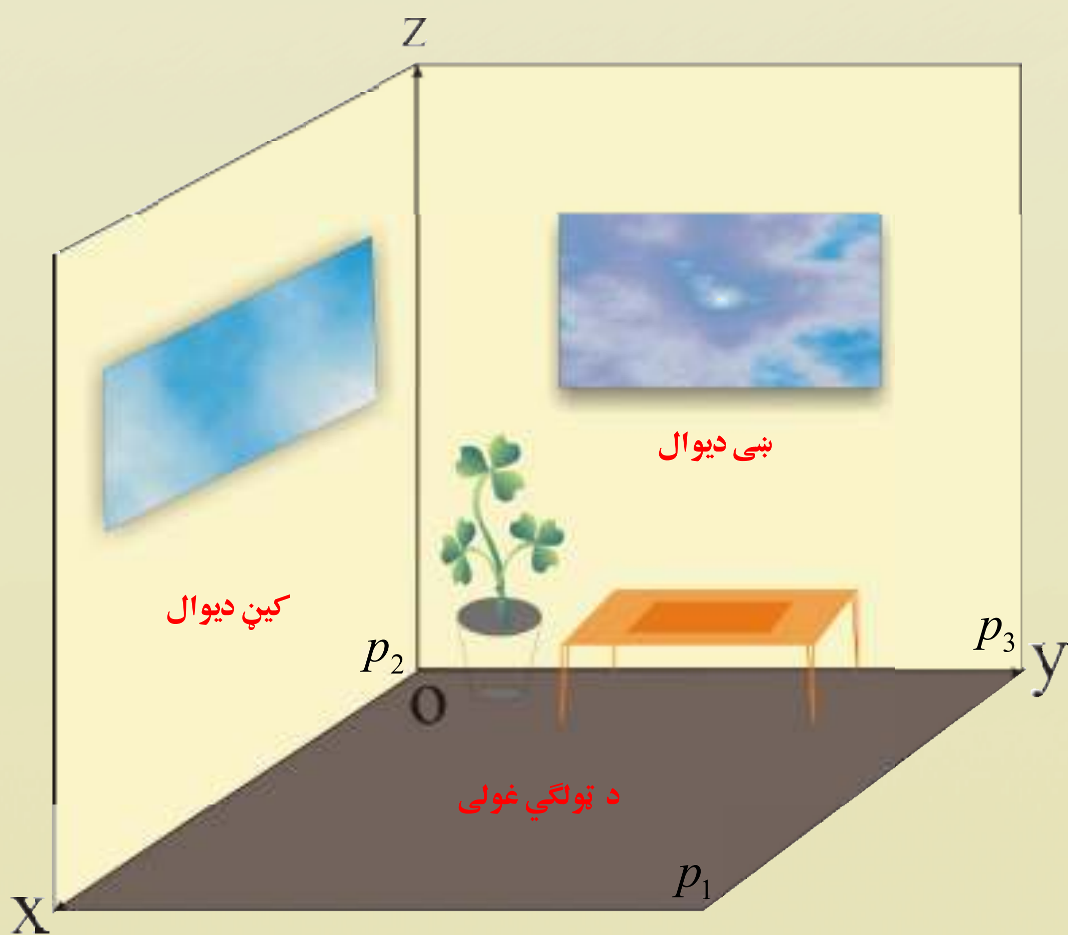
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس مټریکس په طریقه حل کړئ.

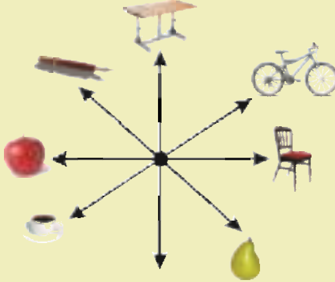
$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

اووم څپرکی

وکتورونه


z
ښی دیوال
کیڼ دیوال
p_2
p_3
y
o
د ټولګي غولی
p_1
x

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه



له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.

تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د B (5,5) مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.

2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

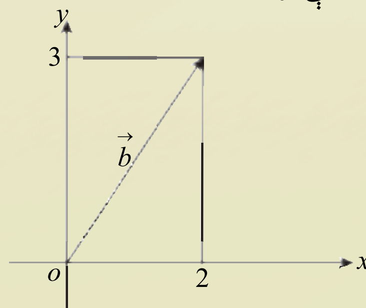
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

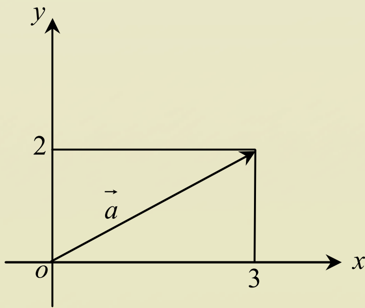
که $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\overrightarrow{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.



پوښتنې

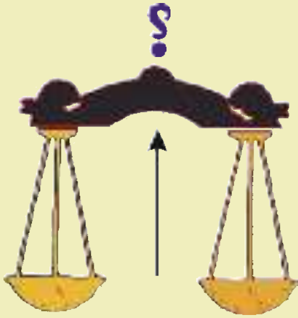
1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنۍ ټکی

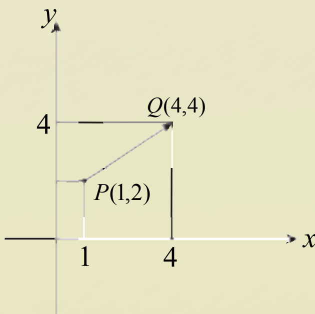


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

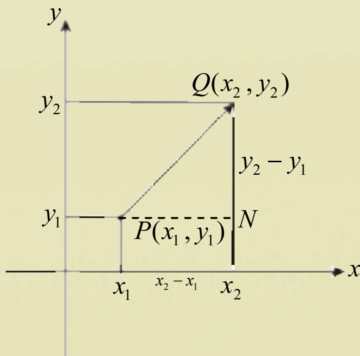
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

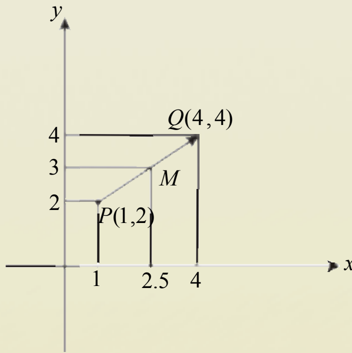
پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^2}$



- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

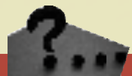
$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a_x{}^2+a_x{}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$



پوښتنې

د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

$i)\ B(2,7)\quad,\quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1)\quad,\quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8)\quad,\quad P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړي وکتورونه ښيي.

د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

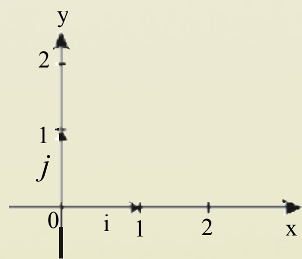
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

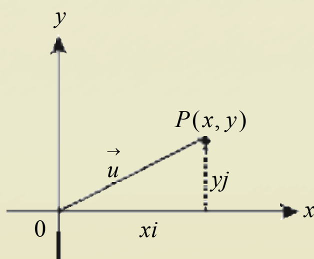
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يـوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غـولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟



تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x,y,z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

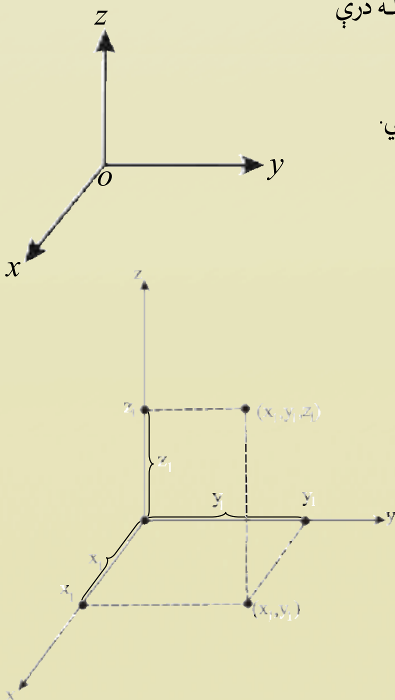
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z)/x,y,z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کېږي.

د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قـايمې زاويـې جـوړوي چې هغه د درې بُعـدي فـضا قـايم مختـصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليـدونکي د تنـې پـه لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکی د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبـارت دی . چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبـارت دي چې لـه درې واړو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.



په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1,y_1,z_1)$ ټکـي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور بانـدې د مختـصې علامې په پام کې نيولـو سره فاصلې جـلا کـوو، لـومړی د x لـه محور څخه مـوازي خط د y لـه محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې (x,y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل پـه درې بعـدي فضا کې بشپړيږي.

یادونه: په درې بعدي فضاکې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3\ ,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضاکې د $P(x, y, z)$ یو ټکی چې د $\overrightarrow{OP}$ وکتور له $\overrightarrow{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\overrightarrow{u}$ او $\overrightarrow{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\overrightarrow{u}=a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ او $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ وي، $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ ، $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$ ، $2\overrightarrow{w}$ او $\left|v-2\overrightarrow{w}\right|$ پیداکړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\overrightarrow{w}=2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{w}\right|=\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

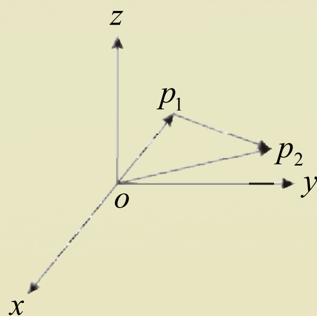
یادونه:

A- کېدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوي، د z, y, x محورونو په امتداد د واحد وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن**: که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$|\vec{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$|\overrightarrow{p_1p_2}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دويم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $\quad ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$

$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=\left|-8i-12j+2k\right|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

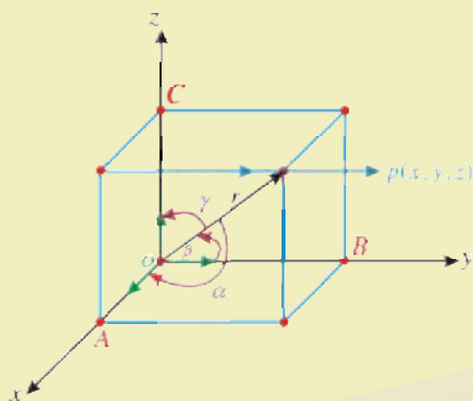
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$



فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاویې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلاي شئ چې د α, β او γ زاويې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضاکې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له: $\dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix}\dfrac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|}\\[2mm]\dfrac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|}\\[2mm]\dfrac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|}\end{pmatrix}$



پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\quad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\quad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضاکې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضاکې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (i

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (ii (د ضرب تبادلوي خاصیت یا ځانګړتیا).

$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (iii (په جمع د ضرب توزیعي خاصیت).

$(c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (iv د ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یوې مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$

څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنی اړیکی څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta\,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ او $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ او $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

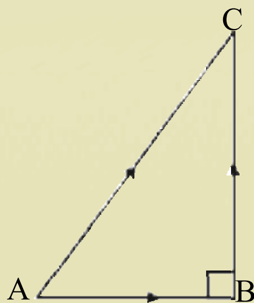
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښایاست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د یو قایم الزاویه مثلث ضلعې دي.

حل: که $\overrightarrow{AB}=\vec{2i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{3j}-\vec{5k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونیسو، نو دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع ټاکې عبارت دی له:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دریمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښیو چې نوموړی مثلث قایم الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له b,a او c سره مساوي دي.

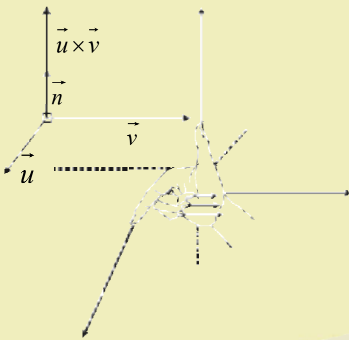
2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ښنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښې لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څیړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: کـه $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونـه راکـړل شـوي وي، وښاياسـت چـې د $\vec{a} = (6\ ,-5\ )$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \quad = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r} 3\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases} \\ 2\ \end{array}$$

$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$

$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$

$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$

$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$

$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور پـه لاس راځـي، نو وموليدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضريبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښيو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 \ , \ x_2)$

نو: $= x_1(1 \ ,0) + x_2(0 \ ,1)$

که $e_2 = (0,1)$ او $e_1 = (1 \ ,0)$ وي.

نو: $(x_1 , x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$(x , y) = (x , 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0 \ ,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z) = (x_1 \ ,0 \ ,0) + (0, x_2 \ ,0) + (0 \ ,0 \ , \ x_3)$$
$$= x_1(1,0 \ ,0) + x_2 (0 \ ,1 \ ,0) + x_3(0,0 \ ,1)$$

څرنگه چې $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x , y \ , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = (x_1 \ , 0, \ldots, \ 0) + (0 \ , x_2 , \ \ldots, \ 0) + \ldots + (0,0 ,\ldots, x_n)$$
$$= x_1(1 ,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n(0 \ , 0,\ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1 , e_2 , \ \ldots \ , e_n$ طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \ \ldots \ , \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي(خطي استقلال) لري، که چېرې د دغه خطي ترکيب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.



فعاليت

که $S = \{(1 \ ,0 \ \ ,0) \ , (0 \ ,1 \ ,0) \ , (0 \ ,0 ,1)\}$ وي وښاياست چې S خطي خپلواکي لري.

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوي دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

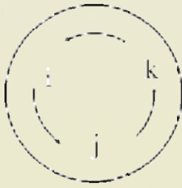
$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0\,,\ \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

ځرنګه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j},\vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوي دایرې په ښي لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i)}\quad \vec{u}\times\vec{u}=0$$

$$\text{ii)}\quad \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

$$\text{iii)}\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

$$\text{iv)}\quad \vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\,\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\,\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\vec{k}$$

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل (درې ګونې ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایلې یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

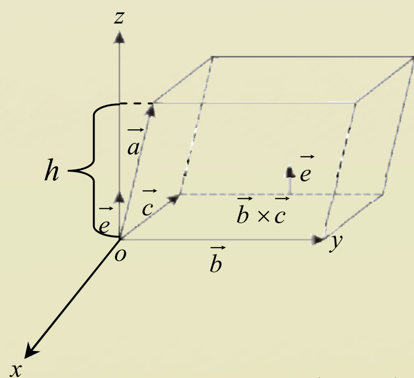
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

iii) $$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$$

iiv) $$\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آیا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

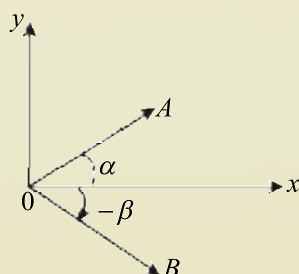
حل: د ښې لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل ځخه پوهېږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

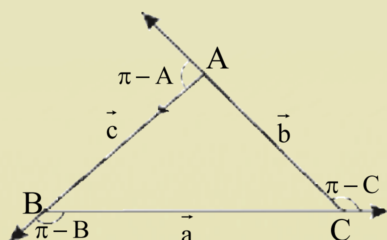
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{OA}|\times|\vec{OB}|=|-\vec{k}|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad ....\ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin(\pi-A)=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ \ /\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\quad ....\ (ii)\quad \text{یا}\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\quad ....\ (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

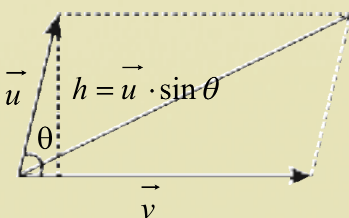
$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A=|\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A=a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\quad .....\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $\dfrac{a}{SinA}=\dfrac{b}{SinB}=\dfrac{c}{SinC}$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت:** د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه د θ لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازای الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

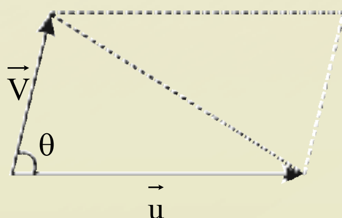
خرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعنې د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله:څرنګه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمایي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\ (\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$





پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$, $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښایاست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

3. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دی.

4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$, $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.

5. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د ښېرکي مهم ټکي

د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې وکتورونه: هغه کميتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی يې مساوي او عين جهت ولري، يو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه يادېږي. هغه وکتور چې مبداء يې د وضعيه کميتونو د قايم سيستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کيږي. يو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په ښېر ښودل کېږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتيب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1, y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2, y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\vec{a}$ ښيو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قايم الزاويه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=|\vec{a}|=$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=M$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې کميتونه يا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عين جهت پروت او يو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه يادېږي.

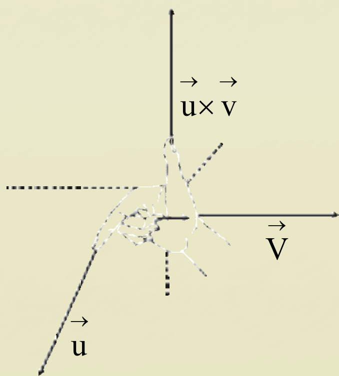
مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په قايم سيستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل يې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\ |\vec{v}|\ Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاويه ده. او د وکتوري ضرب حاصل يې يـو وکتـور دي چـې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کيږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پـر وکتورونـو عمـود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونـه سـره د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کيږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت گوته په قايم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د خنگل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټـه گوتـه د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتـور حاصـل ضرب ښيي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

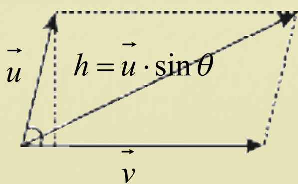
کـــه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضـرب يعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصـل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونـه، چـې صـفر نـه وي، د وکتـوري ضـرب قيمت يې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شـکل کـې تشکيليږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت





د خپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چیرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چیرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$iv)$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i):\quad P(0,0,0),\quad Q(2,3,2),\quad R(-1,1,4)$

$ii):\quad P(1,-1,-1),\quad Q(2,0,-1),\quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i):\quad A(0,0,0),\quad B(1,2,3),\quad C(2,-1,1),\quad D(3,1,4)$

$ii):\quad A(1,2,-1),\quad B(4,2,-3),\quad C(6,-5,2),\quad D(-3.5,-4)$

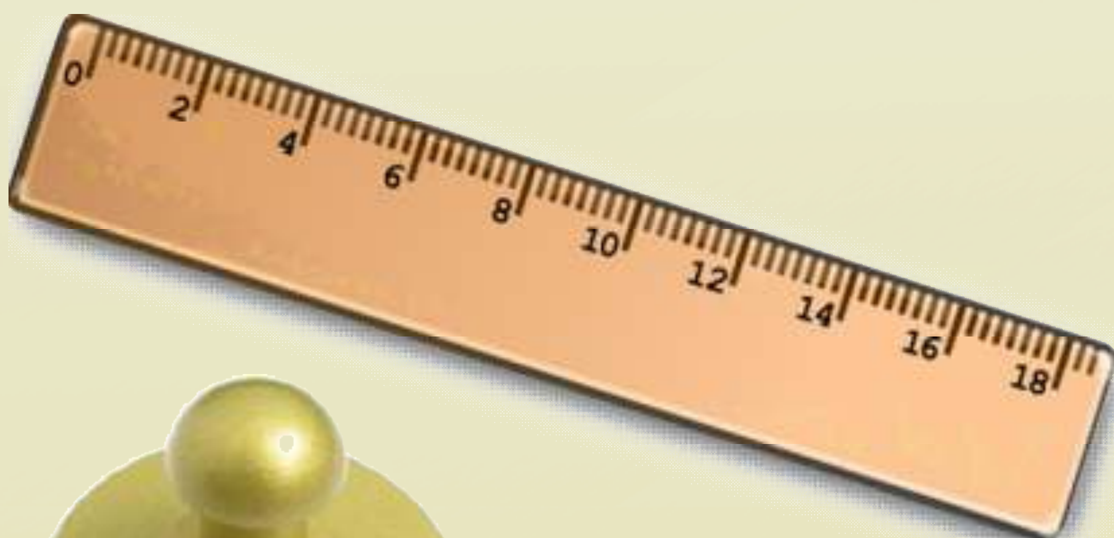
$iii):\quad A(1,-1,1),\quad B(-1,2,2),\quad C(-3,4,-5),\quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i):\quad \vec{u} = 5i - j + k,\quad \vec{v} = j - 5k,\quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii):\quad \vec{u} = i + 2j - k\ ,\quad \vec{v} = i + j + k,\quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی
احصائیه





$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چېرې د يوې ټولنې تيتوالی په متر او د بلې ټولنې په کيلوګرام ښودل شوي وي. آيا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تيتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعاليت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخيص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واريانس او معياري انحراف محاسبه کړئ.
- آيا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولينو د تيتوالی د ميزان پرتله د واريانس او معياري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معياري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو په لاس راغلی مقدار يا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو يا تغييراتو ضريب يا نسبي تيتوالی داسې کارول کېږي، چې واريانس او معياري انحراف هغه نه لري. يو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د يادولو وړ ده.

دبدلونونو يا تغييراتو ضريب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معياري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اويو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي يعنې:

$$\text{دبدلونونو يا تغييراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{يا} \qquad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضريب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضريب يوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعريف شوي وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضريب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په يو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضريب تغير نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A > C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.



پوښتنې

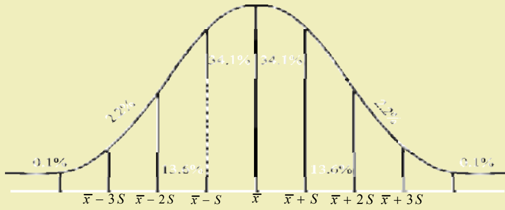
1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې تیتوالی

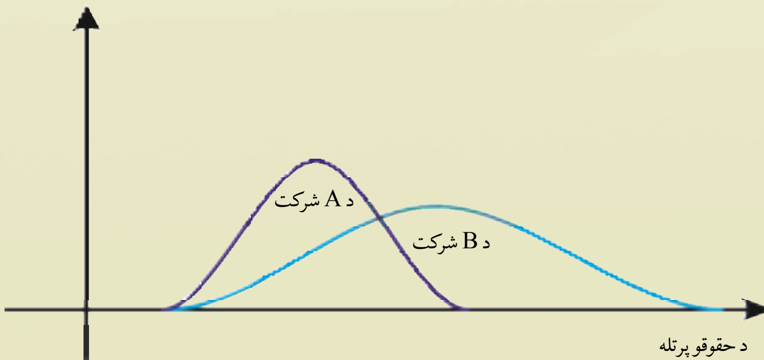


اوریدلي به مو وي چې وایي: یو ښه تصویر د زر کلمیو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأدیه ښیي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأدیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأدیات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معیاري انحراف وي؛ نو 68% دېلټښې موارد په $(\bar{x}-S \ , \bar{x}+S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-2S \ , \bar{x}+2S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-3S \ , \bar{x}+3S)$ فاصله کې یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غير عادي او له $3S$ څخه زيات انحراف زيات غير عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله يا واټن ولري، د تيتوالي يا تيتې ډېټا په نامه يادېږي.

مثال: که د يوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معياري انحراف يې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزيع څخه د فيصدي په ګټه اخيستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزيع تشريح کړئ؟

ب: آيا ويلاي شئ چې د 1400 افغانيو معادل معاش يو غير عادي معاش دی؟

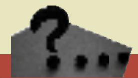
د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm\ 3S$ قيمتونه په لاس راوړو.

فيصدي	فاصله د افغانيو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x}\pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x}\pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x}\pm\ 3S$

د ب حل: لومړی $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ يعنې 1400 افغانيو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

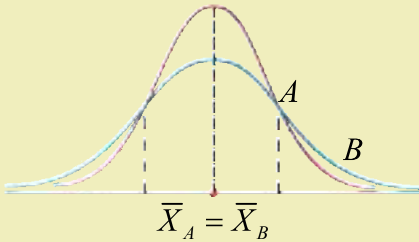
په دې ډول د 1400 افغانيو معاش غير عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زيات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.



پوښتنه

که چېرې 62.28% فيصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آيا ويلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحني سره وښاياست؟

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يـوې احـصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپـاره چـې د يـوې احـصايوي مجمـوعې اطلاعـات، تناظر او د مثبت او منفـي اشـارو لرونکـي وي؛ نـو لـه کـوم ډول منحني څخه بايدګټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسـط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او تيتوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لورې ته خمېدګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چېرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ فورمـول پـه واسـطه پيداکېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S\,k_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسـون د خمېـدلو د لـو ضـريب مثبـت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پړسوب kurtosis معیار**: د پړسوب معیار ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

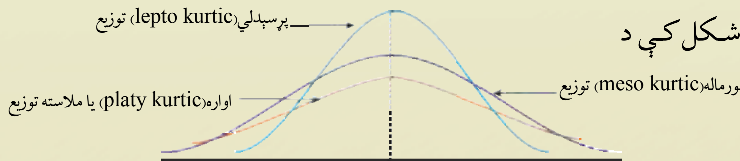
د پړسوب شاخص هغه معمولي معیار دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معیار فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\overline{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب معیار د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معیار د پرتله کېدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې پـه شکل کې د هغوي توزیع ښودل شوې ده ښیي.



حل: د نورمالې توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه: یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالې توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زیاتـه وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پړسیدلی توزیع چې څوکـه لـري او کـه چیـرې α_4 لـه 3 لـږ وي، نظر نورمـالې منحنـي تـه یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

خو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهیږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.



فعالیت

آیا په تیرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څیړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅیړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکې چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کیږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهیږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تیرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار د آساني لپاره معمولاً د یو یا خو متحولینو تر منځ درياضیکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سیستم کې جوړیږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څیر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کیږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلیدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمیر موږکانو څیړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(2,4),(3,5),(1,7),(2,3),(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږك لومړنی او دویمه مختصه د موږك وزن دغذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښيي.

- معلومات په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

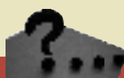
حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتني ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

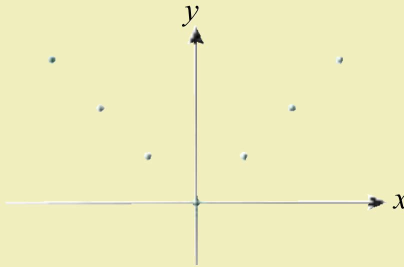


پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

د تیتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یي ولیکئ:

فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

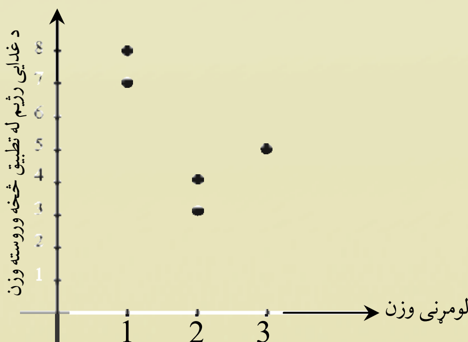
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

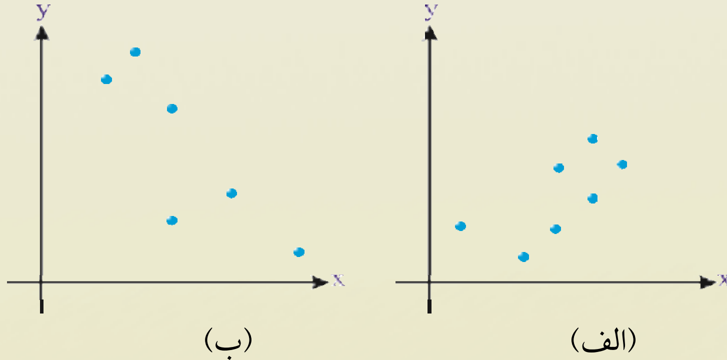
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

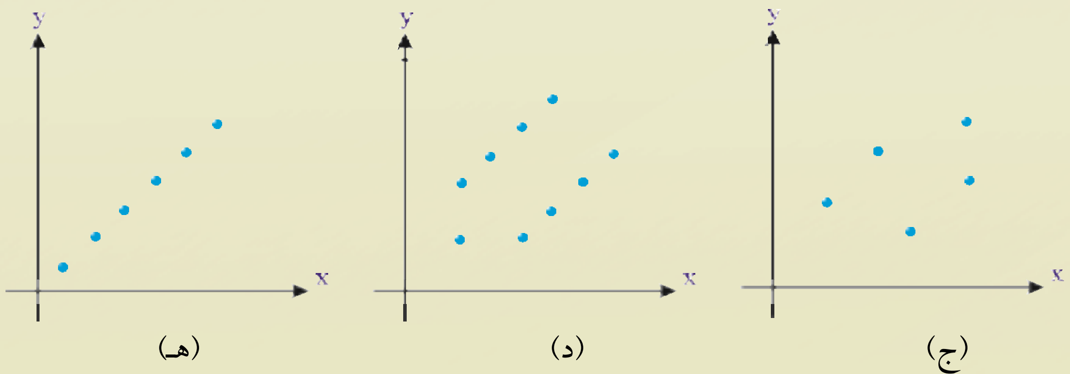
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

پورتنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.



مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



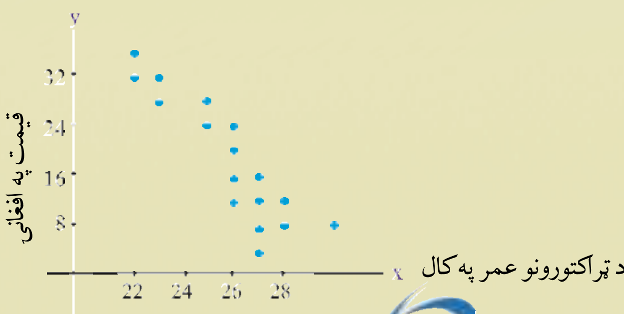


د(الف) په ګراف کې ليدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

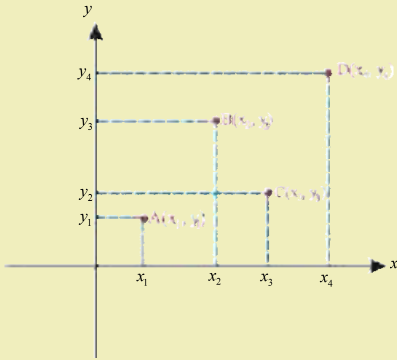
د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو پـه پرتلـه زیاتـه ده، د (هـ)پـه ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکټرونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکـه یـا ارتبـاط وینـې؟ توضیح یې کړئ.



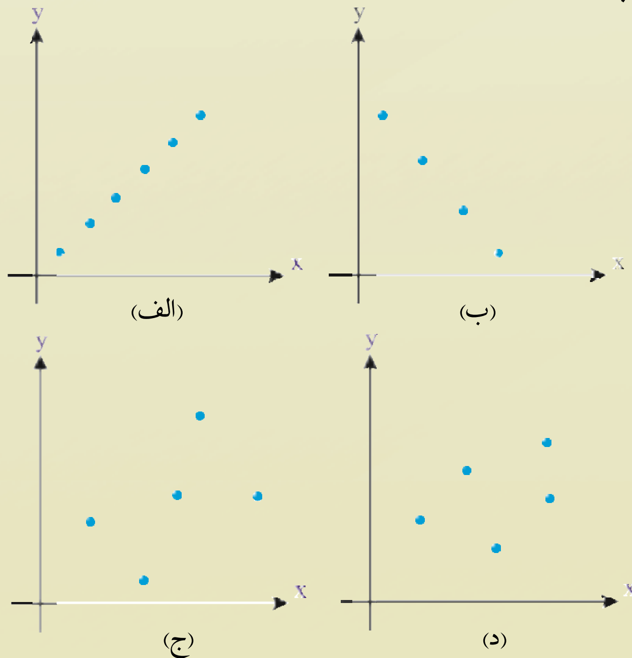
پیوستون او دپیوستون ضریب



د C, B,A او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېریږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتني فعاليت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې يوې مستقيمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در ويېژنو چې د ټکو پيوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په r سره ښودل کيږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } x \text{ ونو اوسط})(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ ونو معياري انحراف})(\text{د } y \text{ ګانو معياري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذايي رژيم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونيسئ.

د موږکانو شمېره	لومړنی وزن X	له عمليې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذايي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

حل: که چيرې x لومړني وزنونه او y د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونيسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واريانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګانو واريانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

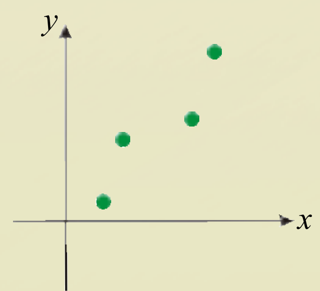
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښـودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

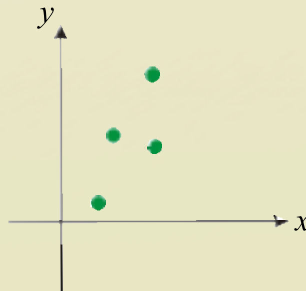
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

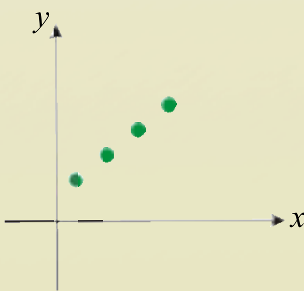
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت تـه د ټکـو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالـت پـه انـدازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

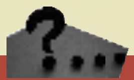
د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.



پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

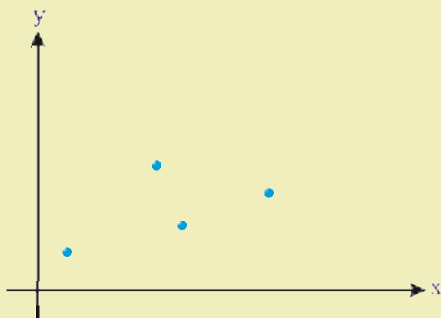
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولگیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

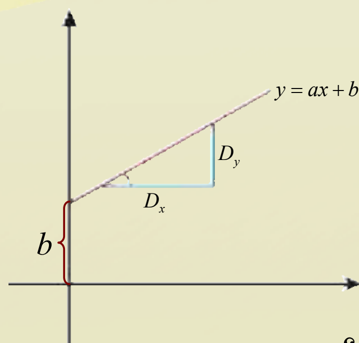
د خطي میلان معادله

The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوي وي، پیدا کړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

فعالیت



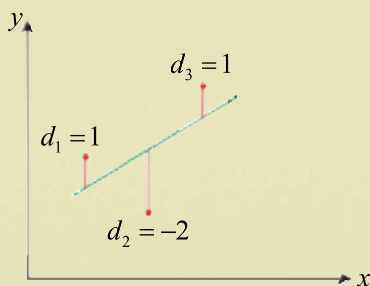
په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

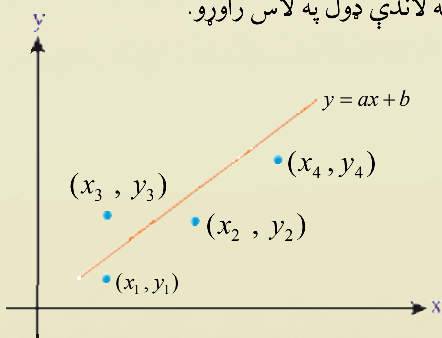


د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضریب ددې معادلې میل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقیمه کرښه متزاید او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکې د مستقیمې کرښې په ګراف پراته دي.

هر څومره چې د پاشلې ټکی مستقیمې کرښې ته نژدې وي، نو د پیوستون ضریب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د یوې مستقیمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پیوستون ضریب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چیرې مستقیمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې یوه تګلاره چې د لږکیو یعني اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه یادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

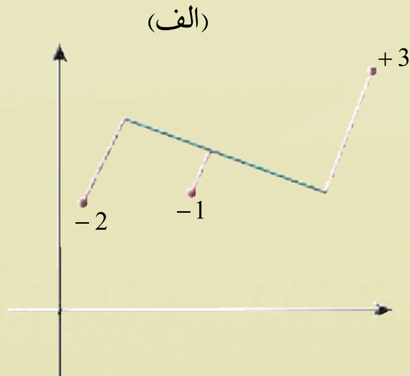


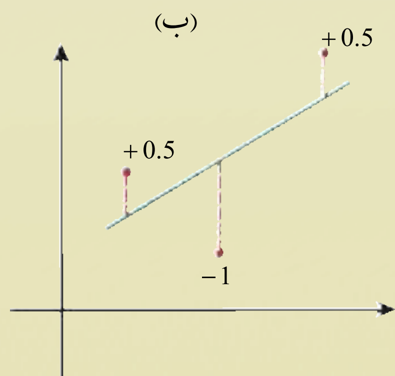
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې یوه کرښه چې معادله یې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تیره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې باید په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دویم توان مجموع له مستقیمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نیسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخیصوو.





[1] - the method of least square

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته ښخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت ښخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y - \bar{y})^2 = \sum [y - (ax + b)]^2$$
$$= \sum (y - b - ax)^2$$
$$= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r\frac{sy}{sx} \quad b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2-(-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$



پوښتنه

که چېرې $y = 2x + 3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\overline{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\overline{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د ټیټوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټیټوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید ځرنګوالی د کږېدواو پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه ځرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\overline{x}-med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) معیار د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د تیتوالي ګراف: د تیتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په یوه مستوي کې د قایمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کیدای شي د ټکو او تیتوالي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولین په یوه لورې بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لوی او یاهم کوچنی شي، چې پیوستون یې مستقیمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چېرې x لوی شي y کوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوستون ډول، جهت او میزان د پیوستون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-(\bar{x}\,\bar{y})}{S_x\cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د xونو او yګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دی، همداراز S_x د xونو معیاري انحراف او S_y د yګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طریقه حساب او همدارنګه د a او b ضریبونه د دغې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a=\bar{y}-b\bar{x}\qquad,\qquad b=r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوستون ضریب، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دی.

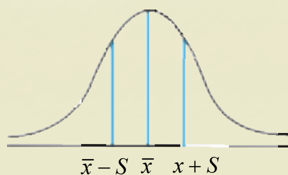


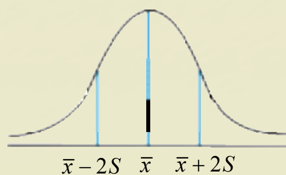
د څپرکي پوښتنې

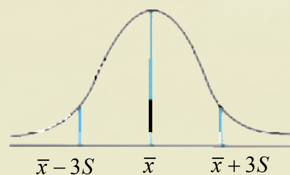
1-که چېرې په يوه ټولنه کې چې اوسط يې $\overline{x}=50$ او واريانس يې $S^2=64$ وي، د بدلون ضريب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چېرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزياتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضريب څه اغيزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فيصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، وليکئ؟







4- لاندې اړيکو ته په پاملرنې سره ووایاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړيکې دي.

الف: ستاسو د ټولګيوالو د ونو اندازه؟

ب: د يو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړيکه؟

ج: د يوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړيکې؟

5- د يو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخيستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړيکو له مخې ګراف رسم او خپلې پايلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونيسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

که چېرې د پيوستون ضريب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پيوستون ضريب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وايئ؟

د سروې له مخې چې د يوه ښوونځي په دو A او B ټولګيو کې شوې ده، لاندې عددونه د کيلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د معلومات د تیتوالي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګرېشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

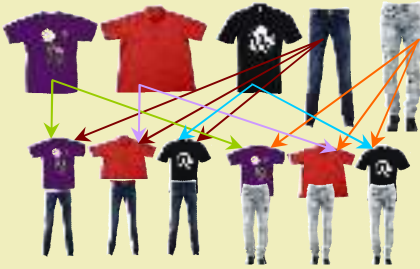
نهم څپرکی

احتمالات



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، پـه څـو ډولـه کـولای شـو هغـه سـره جـوړه جـوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څـو درې رقمـي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایې چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $2\cdot1\ \ \dots\ \ n\cdot(n-1)$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \dots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}\ n}=n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عـدد لپاره د $(1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n)$ حاصـل ضـرب پـه لنډ ډول پـه $n!$ (n – فکتوریـل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامـه هـم یـادېږي په P_n سره ښودل کېږي.که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نېولو سره $P_n=n!$ سره کېږي.

که چېرې په ترتیب کې تکرار شونی او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $(k \leq n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$ او دارنگه معنا ورکوي چې یو عنصر په n ترتیب کې k ځلې تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر یوه طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده ؟

حل (i):د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولگیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوې دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېني چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکارېږي، نو په دې صورت کې لرو چې:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \leq n)$$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m گروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای	
2	3	4	دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لروچې:

$$P_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!}=24$$

پوښتنې 

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هيڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه گردي میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځاي بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

ترکیب یا کمبېنیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \quad , \quad k,n\in IN$$



فعالیت

- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}=1$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$ $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r لـه n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نـشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې لـه 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول پـه توګـه و ټاکل شـي، پـه دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب پـه داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD پـه ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$



پوښتنې

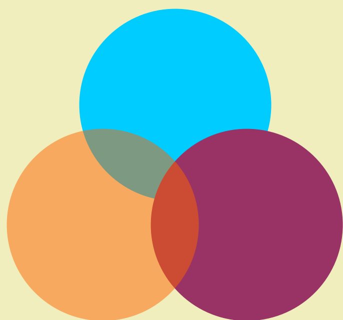
1- له اوو حرفونو څخه لکه: F, E, D, C, B, A او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریـم مقـام لاس تـه راوړي؟

3- له 4 نارینهوو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینـه پـه کـې یـو رئـیس او دویـم یـې مـالي مسؤول وي.

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$



پوښتنې

1- که چېرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چېرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبـدیـل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشـي ټیمونـو څخه پـه څـو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شـتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو، د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شـتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!{\cdot}C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!{\cdot}C_k^n = k!{\cdot}\frac{n!}{k!{\cdot}(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

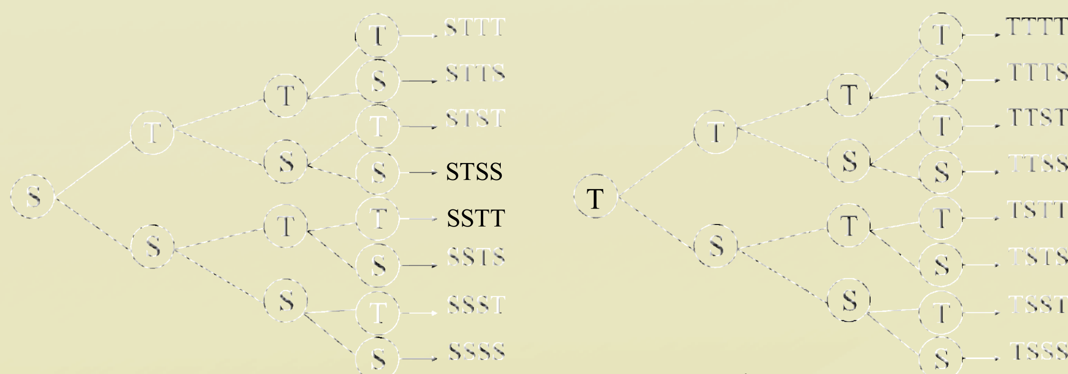
حل: مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف لـه مخې لـه لانـدې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

د امکاناتو شمېر		د ټاکنو ډول k غړي لـه n غـړو څخه
له تکرار سره $k \le n$	پرته له تکراره $k \le n$	
$P(n,k)=\frac{n!}{k!}$	$P(n,k)=n! \quad , \quad n=k$	ترتیب یا پرموټېشن
$C_k^n=\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$	$C_k^n=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترکیب یا کمبېنېشن
$V_k^n=n^k$	$V_k^n=k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\frac{n!}{(n-k)!}$	تبدیل یا وریشن

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغور ځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.

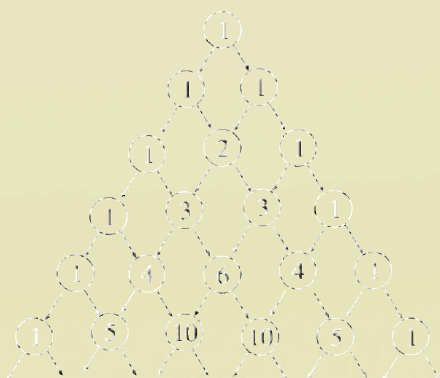


د پاسني مثال د شېر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سکې غورځول	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		درې ځله		څلورځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمیر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کینې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بېنهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جملهېږ په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده يو شان ده:

$(a+b)^0 = \textcircled{1}$

$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$

$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$

$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$

$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^3$



چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دي له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$



پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.
2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازې د مرستيال په توګه وټاکو.

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$

$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2 b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$

$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3 b + \bigcirc a^2 b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

فعالیت

- په یوه ناخاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناخاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A, \overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A) = P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی
  $P(\overline{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بینوم د ضریبونو ارایه	احتمال	ممکنې پایلې	k
$\binom{2}{0} . p^0 . (1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2} p^2 (1-p)^2$		11	2
$\sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$	$(p+(1-p))^2$		

د $B(n, p, k)$ لیکنه د برتولي د مسالې د احتمال په نامه یادیږي.

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناځاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناځاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\leq n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

د A حارثه $|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چېرې د A ناځاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$



پوښتنې

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

دوه جمله يي احتمال



آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو. موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.



فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې($0 \le k \le n$) وړل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې برياليتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.
- که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$ = k، – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بايللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناخاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{2})^k \cdot (1-\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یـوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وڅېړئ؟

دویم مثال: په یوه کورنی کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلی زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p = \frac{1}{2}$ او $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي. $= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0.3125 = 31.25\%$

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي) $= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243} = 0.0823 = 8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال یـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمـال یـې p پـه پـام کې ونیـسو، نـو د خـط د نـه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1 - p = \frac{1}{3} p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتګ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.



پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړی چې:

i): په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.

ii): په 6 ځله غورځیدو کې، 3 ځلې خط راشي

iii): په 8 ځله غور ځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.

iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشـي، د n پـه ډېریـدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

فکتوریـــــل: د هـــر n طبیعـــي عـــدد لپـــاره د n· ... ·$1\cdot2\cdot3$ د ضـــرب حاصـــل پـــه لنـــډ ډول پـــه n!(n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n=n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په $P_k^{\,n}$ سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونـه مـساوي دی په: $P_k^{\,n}=\dfrac{n!}{k!}\quad,\quad k\le n$

$\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$ د n **له پاسه** k: د $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$, n د k له پاسه، د بېنوم هغه ضریبونه دي چې k د بېنوم د توان پـه ټـاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي: $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ، $n,k\in IN$ ، $0\le k\le n$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په: $C_r^n=\begin{pmatrix}n\\r\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\quad,\quad r\le n$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غـړو څخه مطلوب وي، په نامه دې، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^{\,n}=k!\cdot C_k^{\,n}=k!\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^{\,n}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

دبېنوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورېلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q=1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \text{د k ځلې ورېلو د احتمال قیمت د تجربې د n ځلې په پای کې} \right\rangle=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\ ،\ 0\le k\le n$$



د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دریدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کي خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخیستلو لپاره ودریږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو وویشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟